PREP@BAC

l'examen

le tout-

1.99

n du bac

Tle S

NOUVEAU PROGRAMME

Maths

T. 1 enseignement obligatoire

reste bien ouvert

- **Synthèses de cours** pour retenir l'essentiel
- **Méthodes** pour acquérir les savoir-faire
- **Exercices type bac avec corrigés** pour se préparer à l'examen

HATIER

www.editions-hatier.fr

T^le^ S

PREP@BAC

l'examen

Maths T. 1

enseignement obligatoire
nouveau programme 2002

René Merckhoffer

HATIER

Maquette de principe : Graphismes
Mise en pages : Alpha-Edit
Schémas : Alpha-Edit
Édition : Régine Delay
Correction : Gérard Tartary

 2-218-73901-1

AVANT-PROPOS

Ce Prép@bac-Examen traite de l'enseignement obligatoire de la classe de Terminale S nouveaux programmes.

La structure de chaque chapitre montre que **le travail** à effectuer pour se préparer à l'examen **doit être progressif**.
L'utilisation de l'ouvrage pour obtenir « une solution toute faite » ne correspond pas à celle envisagée par l'auteur. Il s'agit d'un travail progressif dont **l'objectif est d'acquérir sa propre autonomie dans les travaux de recherche**.

Vous trouverez donc, dans chaque chapitre, deux parties :

LE COURS :
- L'essentiel du cours,
- Fiches méthodes,
- Pièges à éviter,
- Gérer ses connaissances.

L'EXAMEN :
- Exercices d'application,
- Exercices de synthèse,
- L'épreuve du bac.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

CONSEILS

Ⓐ Comment réagir devant un énoncé

Prenez le temps de lire **tout** le sujet en vous efforçant de *comprendre* tous les mots utilisés et de *cerner* les notions abordées.
Soulignez dans le texte les *données* importantes.
Repérez les questions indépendantes et les calculs faisables immédiatement.
Certaines questions nécessitent une recherche au brouillon mais il est exclu d'en faire une rédaction détaillée au brouillon.
Recopiez au fur et à mesure.
Si vous ne savez pas traiter une question, ne vous obstinez pas : vous risquez de perdre votre sang-froid et de commettre ensuite des erreurs « bêtes ».
Continuez en supposant le résultat acquis.
Sachez vous arrêter dès que les calculs deviennent trop importants.

Ⓑ Comment améliorer la rédaction

Écrivez proprement et clairement pour faciliter la correction et donner une bonne impression au correcteur.
Rédigez correctement, avec les explications appropriées, sans discours inutile.
Utilisez la bonne terminologie.
Toute question dont l'énoncé commence par : « En déduire » doit avoir pour solution une déduction et donc l'utilisation de résultats déjà prouvés.
Vérifier que les résultats trouvés sont vraisemblables.
Une calculatrice, même graphique, aide mais ne remplace **en aucun cas** la justification des résultats.

BON COURAGE

1 Nombres complexes

1 Définition

Tout **nombre complexe Z** s'écrit de façon unique :

$$Z = a + \mathrm{i}b\,,\ \text{ où }\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\ \text{ et }\ \mathrm{i}^2 = -1.$$

a est appelé la **partie réelle** du complexe Z et notée $\mathcal{R}e(Z)$;
b est appelé la **partie imaginaire** du complexe Z et notée $\mathcal{I}m(Z)$.

2 Égalité

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont **la même partie réelle et la même partie imaginaire.**
Pour $(X\ ;\ Y) \in \mathbb{R}^2,\ X + \mathrm{i}Y = 0 \Leftrightarrow X = 0\ \text{ et }\ Y = 0.$

3 Racines carrées d'un nombre réel négatif

Soit a strictement négatif. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $Z^2 = a$, d'inconnue Z, admet deux solutions :
$\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

4 Nombres complexes conjugués

Le **conjugué** du nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$, $(a\,;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, est le nombre complexe $a - \mathrm{i}b$ noté $\overline{Z}$.

Propriétés

Z, Z_1 et Z_2 désignant des nombres complexes, nous avons :

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}\ ;\quad \overline{Z_1 \times Z_2} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}\ ;\quad \overline{(-Z)} = -\overline{Z}.$$

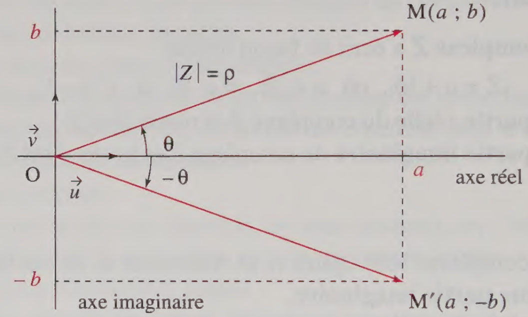
$$\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\overline{Z}}\ \text{ pour } Z \neq 0\ ;\quad \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}\ \text{ pour } Z_2 \neq 0.$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{Z}\ \text{ et }\ Z \neq 0,\ \overline{Z^n} = \overline{Z}^{\,n}.$$

5 Représentation géométrique des nombres complexes

■ Tout nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$, $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$, peut être représenté, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$, par le point $\mathrm{M}(a\ ;\ b)$ défini par $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

M est l'**image** du nombre complexe Z équivaut à Z est l'**affixe** du point M.



Pour $Z \neq 0$, $Z = a + \mathrm{i}b$ affixe du point M, $\quad \overline{Z} = a - \mathrm{i}b$ affixe du point M′,

$$\begin{cases} |Z| = \rho = \mathrm{OM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| \\ \theta = \arg Z \quad (2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} |\overline{Z}| = \rho = \mathrm{OM}' = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right\| \\ -\theta = \arg \overline{Z} \quad (2\pi). \end{cases}$$

■ **L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$** est $Z_B - Z_A$, où Z_A et Z_B sont les affixes respectives des points A et B.

6 Module d'un nombre complexe

■ **Définition**

Le **module** d'un nombre complexe Z d'image M est la distance OM.
On note $\mathrm{OM} = |Z|$.

Pour $Z = a + \mathrm{i}b$, $(a\ ,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Nous avons $\mathrm{AB} = |Z_B - Z_A|$, où Z_A et Z_B sont les affixes respectives des points A et B.

■ **Propriétés**

Z, Z_1 et Z_2, désignant des nombres complexes, on a :

$$|Z_1+Z_2| \leqslant |Z_1|+|Z_2| \;; \quad |Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2| \;;$$

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|} \text{ pour } Z \neq 0 \;; \quad \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \text{ pour } Z_2 \neq 0 \;;$$

$$|\overline{Z}| = |Z| \quad \text{et} \quad |Z|^2 = Z\overline{Z}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $Z \neq 0$, $|Z^n| = |Z|^n$.

7 Équation du second degré à coefficients réels

Une équation du second degré à coefficients réels admet dans $\mathbb{C}$:

– **une ou deux solutions réelles** si, et seulement si $\Delta \geqslant 0$.

– **deux solutions complexes conjuguées** si, et seulement si $\Delta < 0$.

8 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

$\boldsymbol{Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$, avec $|Z| = \rho$ $(\rho \in \;]0\,,+\infty[)$ et $\arg Z = \theta$, θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$ (voir la figure du § 5).

■ **Propriétés**

Z_1, Z_2 et Z désignant des complexes non nuls :

$$\arg(Z_1 \times Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) \quad (2\pi) \;; \quad \arg\overline{Z} = -\arg Z \quad (2\pi) \;;$$

$$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg Z \quad (2\pi) \;; \quad \arg\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right) = 2\arg Z \quad (2\pi) \;;$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2 \quad (2\pi).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(Z^n) = n\arg Z \quad (2\pi)$.

1 Savoir utiliser les nombres complexes

Pour calculer une distance :

$AB = |Z_B - Z_A|$.

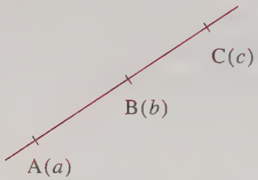
Pour calculer un angle :

A, B et C étant trois points deux à deux distincts,

une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un argument du nombre complexe $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

Pour caractériser des propriétés géométriques :

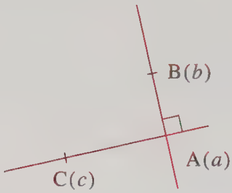
- alignement



A, B, C sont alignés et $A \neq B$
si, et seulement si :

$\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.

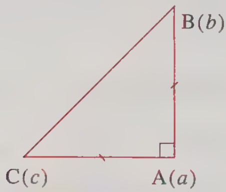
- orthogonalité



$A \neq B$ et $(AB) \perp (AC)$
si, et seulement si :

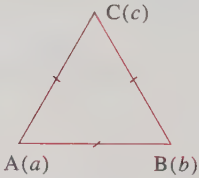
$\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Pour caractériser des configurations courantes :



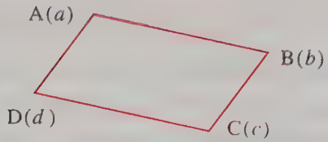
ABC est un triangle isocèle
rectangle direct en A
si, et seulement si :

$c - a = \mathrm{i}(b - a)$ pour $a \neq b$.



ABC est un triangle équilatéral
si, et seulement si :

$c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b - a)$ pour $a \neq b$.



ABCD est un parallélogramme si, et seulement si : $b-a=c-d$.

2 Savoir effectuer certains calculs

■ **Avec des nombres complexes écrits sous la forme $x+\mathrm{i}y$ $(x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R})$:**

- utiliser les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ avec $\mathrm{i}^2=-1$;
- utiliser $\overline{a+\mathrm{i}b}$ pour simplifier certains résultats.

■ **Pour rechercher la forme trigonométrique du complexe $a+\mathrm{i}b$,** non nul :

- calculer le module $r=\sqrt{a^2+b^2}$;
- mettre ce module en facteur dans $a+\mathrm{i}b$: $a+\mathrm{i}b=r\left(\frac{a}{r}+\mathrm{i}\frac{b}{r}\right)$;
- un argument de $a+\mathrm{i}b$, noté θ, est alors le réel tel que :

$$\cos\theta=\frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{b}{r}\,;$$

utiliser parfois $\overline{a+\mathrm{i}b}=a-\mathrm{i}b$ pour déterminer plus facilement $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis θ.

3 Comment démontrer que :

■ **un nombre complexe Z est réel ?**
Il faut et il suffit que l'une des propriétés suivantes soit vraie :

- $\mathcal{I}\mathrm{m}(Z)=0$;
- $Z=\overline{Z}$;
- $Z=0$ ou $\arg(Z)=0\ (\pi)$;
- le point M d'affixe Z appartient à l'axe des abscisses.

■ **un nombre complexe Z est imaginaire pur ?**
Il faut et il suffit que l'une des propriétés suivantes soit vraie :

- $\mathcal{R}\mathrm{e}(Z)=0$;
- $Z=-\overline{Z}$ (ou $Z+\overline{Z}=0$) ;

- $Z=0$ ou $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$;
- le point M d'affixe Z appartient à l'axe des ordonnées.

un nombre complexe Z a pour module 1 ?
Il faut et il suffit que l'une des propriétés suivantes soit vraie :

- $(\mathcal{R}e(Z))^2+(\mathcal{I}m(Z))^2=1$;
- $Z\overline{Z}=1$;
- Le point M d'affixe Z appartient au cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$;
- Z s'écrit sous la forme $\cos\theta+i\sin\theta$ avec θ réel.

4 Interprétations géométriques

Interprétation géométrique de Z et argZ pour $Z=\frac{z-a}{z-b}$ pour a et b complexes.

Si M, A et B sont les points du plan complexe d'affixes respectives z, a et b, alors pour $z\neq a$ et $z\neq b$, on a :

$$Z=\frac{z-a}{z-b} \text{ équivaut à : } \begin{cases} |Z|=\dfrac{MA}{MB} \\ \arg(Z)=(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})\ (2\pi) \end{cases}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-a}{z-b}$ réel est la droite (AB) privée du point B.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-a}{z-b}$ imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé du point B.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Pour chacun des exercices suivants, dire si les affirmations a, b, c,... sont vraies ou fausses ?
Justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** Soit le nombre complexe $Z = -2 + \mathrm{i}$, alors :

a. $\bar{Z} = 2 - \mathrm{i}$; **b.** $|Z| = \sqrt{5}$; **c.** $\dfrac{1}{Z} = -2 - \mathrm{i}$.

▶ **2.** Soit le nombre complexe $Z = \cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{3}$:

a. un argument de Z est $\dfrac{\pi}{3}$; **b.** $|Z| = 1$; **c.** $\dfrac{1}{Z} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$.

▶ **3.** L'équation $Z^2 + 1 = 0$ admet pour solutions dans $\mathbb{C}$:

a. $Z_1 = \mathrm{i}$ et $Z_2 = -\mathrm{i}$;

b. $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et $Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;

c. $Z = 1 + \mathrm{i}$ et $Z = 1 - \mathrm{i}$.

▶ **4.** Le complexe $Z = Z_1 + \mathrm{i}Z_2$, avec Z_1 et Z_2 complexes, admet pour conjugué :

a. $\overline{Z} = \overline{Z_1} + \mathrm{i}\overline{Z_2}$; **b.** $\overline{Z} = Z_1 - \mathrm{i}Z_2$; **c.** $\overline{Z} = \overline{Z_1} - \mathrm{i}\overline{Z_2}$.

▶ **5.** Pour $Z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $Z' = \dfrac{Z}{1 + |Z|}$, alors $|Z'| = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

▶ **6.** Pour $Z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, alors $Z^5 = -16\overline{Z}$.

▶ **7.** Pour $Z = -3(\sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, un argument de Z est $\pi - \alpha$.

▶ **8.** Pour $Z = \dfrac{1}{(\sin x - \mathrm{i}\cos x)^3}$, avec $x \in \mathbb{R}$, on a $Z = -\sin 3x + \mathrm{i}\cos 3x$.

▶ **9.** L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $Z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}Z$ caractérise la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

▶ 10. L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $Z \mapsto Z + 2 + 3\mathrm{i}$ caractérise la translation de vecteur $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

▶ 11. Soit z le nombre complexe donné sous la forme :

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\left(\sin\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$. Alors :

a. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}$; **b.** $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}$; **c.** $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}$;

d. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}$; **e.** $z = \sin\dfrac{\pi}{20} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{20}$.

▶ 12. Soit les complexes $z_1 = 3 + 7\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 - 5\mathrm{i}$, solutions de l'équation $(1+\mathrm{i})z^2 + az + b = 0$. Alors :

a. $a = -5 - 9\mathrm{i}$ et $b = 34 + 60\mathrm{i}$;

b. $a = 34 + 60\mathrm{i}$ et $b = -5 - 9\mathrm{i}$;

c. les constantes a et b ne sont pas déterminées de manière unique ;

d. $a = 5 + 9\mathrm{i}$ et $b = 34 + 60\mathrm{i}$;

e. $a = -5 - 9\mathrm{i}$ et $b = -34 - 60\mathrm{i}$.

▶ 13. Soit $Z = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z - 4}$, avec $z \neq 4$. On note F_1 l'ensemble des points M tels que $\mathcal{R}\mathrm{e}(Z) = 0$ et F_2 l'ensemble des points M tels que $\mathcal{I}\mathrm{m}(Z) = 0$. Alors :

a. F_1 et F_2 sont des droites ;

b. F_1 et F_2 sont des cercles ;

c. F_1 et F_2 se coupent en deux points distincts ;

d. F_1 et F_2 ne se coupent pas ;

e. F_1 et F_2 ont un unique point d'intersection.

▶ 14. Soit A, M, et M′ les points d'affixes respectives 1, z et z^2, avec $z \neq 1$. Alors les valeurs de z pour que le triangle AMM′ soit équilatéral sont :

a. $z = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **b.** $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **c.** $z = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d. $z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **e.** $z = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

▶ 15. Soit l'équation (E), $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ son conjugué : (E) $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$. Alors :

a. l'équation (E) n'admet pas de solution ;

b. l'équation (E) admet deux solutions ;
c. l'équation (E) admet quatre solutions réelles ;
d. la somme des racines de (E) est 0 ;
e. $z = 1$ est solutions de (E).

2 Réponses

1. a. $\overline{Z} = \overline{-2+\mathrm{i}}$, soit $\overline{Z} = -2-\mathrm{i}$, la réponse est fausse.

b. $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, soit $|Z|^2 = (-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})$

$|Z|^2 = 5$ et $|Z| = \sqrt{5}$

ou encore $|Z| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$, la réponse est correcte.

c. $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{-2+\mathrm{i}}$, soit $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{\overline{Z}}{Z\overline{Z}}$, d'où $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{\overline{Z}}{|Z|^2}$ et $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{5}$,

soit $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{-2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

La réponse est fausse.

2. Soit $Z = \cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ qui s'écrit aussi $Z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

a. $Z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, donc un argument de Z est $-\dfrac{\pi}{3}$, la réponse est fausse.

Ou encore : $\overline{Z} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$, donc un argument de $\overline{Z}$ est $\dfrac{\pi}{3}$,

et alors un argument de Z est $-\dfrac{\pi}{3}$.

b. $|Z| = 1$, car $Z = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. La réponse est correcte.

c. $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$, soit $\dfrac{1}{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$. La réponse est correcte.

3. L'équation $Z^2 + 1 = 0$ équivaut à : $Z^2 - \mathrm{i}^2 = 0$

$(Z-\mathrm{i})(Z+\mathrm{i}) = 0$

Les solutions sont i et $-$i ou encore $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
Les réponses **a.** et **b.** sont correctes.

4. Soit $Z = Z_1 + \mathrm{i}Z_2$, avec Z_1 et Z_2 complexes.
D'après les propriétés de la conjugaison, on a :

$\overline{Z} = \overline{Z_1 + \mathrm{i}Z_2}$

$\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{iZ_2}$ (conjugué de la somme de deux nombres complexes)

$\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{i} \cdot \overline{Z_2}$ (conjugué du produit de deux nombres complexes)

$\overline{Z} = \overline{Z_1} - i\overline{Z_2}$ (car $\overline{i} = -i$)

La réponse **c.** est correcte.

5. Soit $Z = 1 + i\sqrt{3}$ d'où $|Z| = \sqrt{4} = 2$.

$\dfrac{Z}{1+|Z|} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{3}$, donc $Z' = \dfrac{1}{3} + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $|Z'| = \dfrac{2}{3}$.

Ou encore $|Z'| = \dfrac{|Z|}{1+|Z|}$, donc $|Z'| = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$.

La réponse $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ est fausse.

6. Soit $Z = \sqrt{3} - i$

$$Z^2 = 2 - 2i\sqrt{3} = 2(1 - i\sqrt{3})$$

$$Z^4 = 4(1 - i\sqrt{3})^2, \text{ donc } Z^4 = -8(1 + i\sqrt{3})$$

$$Z^5 = Z \times Z^4, \text{ donc } Z^5 = -8(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$$

$$Z^5 = -8(2\sqrt{3} + 2i)$$

$$Z^5 = -16(\sqrt{3} + i)$$

$$Z^5 = -16\overline{Z}.$$

La réponse fournie est correcte.

7. Soit $Z = -3(\sin\alpha - i\cos\alpha)$.

$$Z = 3e^{i\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$Z = 3e^{i\pi} \times e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

Un argument de Z est $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

La réponse fournie est fausse, sauf si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (2π) ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ (2π).

8. Soit :

$$Z = \frac{1}{(\sin x - i\cos x)^3}.$$

$$\sin x - i\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

et $(\sin x - \mathrm{i}\cos x)^{-3} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

D'où $Z = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

$Z = -\sin 3x - \mathrm{i}\cos 3x$ et la réponse fournie est fausse.

▶ **9.** La réponse est correcte puisque la rotation de centre O et d'angle θ a pour écriture complexe $Z' = Z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

▶ **10.** La réponse est correcte, car la transformation du plan d'écriture complexe $Z' = Z + a$ caractérise une translation de vecteur ayant a pour affixe.

▶ **11.** **a.** Faux ;
b. Faux ;
c. Vrai ;
d. Faux ;
e. Faux.

▶ **12.** **a.** Vrai ;
b. Faux ;
c. Faux ;
d. Faux ;
e. Faux.

▶ **13.** **a.** Faux ;
b. Faux ;
c. Faux ;
d. Faux ;
e. Vrai.

▶ **14.** **a.** Faux ;
b. Faux ;
c. Vrai ;
d. Faux ;
e. Faux.

▶ **15.** **a.** Faux ;
b. Faux ;
c. Faux ; $S = \{-1\ ;\ 5\ ;\ -2 + \mathrm{i}\sqrt{7}\ ;\ -2 - \mathrm{i}\sqrt{7}\}$.
d. Faux ;
e. Faux.

Dans les exercices suivants, pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse avec précision.

▶ 1. Soit $z = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, alors son écriture exponentielle est :

a. $z = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$; **b.** $z = e^{i\frac{17\pi}{12}}$; **c.** $z = e^{i\frac{7\pi}{12}}$; **d.** $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$; **e.** $z = e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ est le complexe de module 1 dont un argument est $\dfrac{\pi}{6}$, soit $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est le complexe de module 1 dont un argument est $-\dfrac{\pi}{4}$, soit $e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Il s'ensuit que $z = \dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, soit $z = e^{i\left(\frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

▶ 2. Soit $z = (1 + \cos\theta) - i\sin\theta$, avec $\theta \in \,]-\pi\,,\,\pi[$.

a. $\arg z = -\dfrac{\theta}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **b.** $\arg z = \dfrac{\theta}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

c. $\arg z = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **d.** $\arg z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

e. $\arg z = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$, soit

$z = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

c'est-à-dire $z = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} - i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$.

GÉRER SES CONNAISSANCES

Or pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et alors $2\cos\frac{\theta}{2} > 0$.

Il s'ensuit que z est le complexe de module $2\cos\frac{\theta}{2}$ dont un argument est $-\frac{\theta}{2}$.

3. Soit m le point d'affixe z, avec $z = x + \mathrm{i}y$, x et y réels.

Soit M le point d'affixe Z, avec $Z = \frac{z+1}{z-1}$, $z \neq 1$. On note A le point d'affixe 1.
Si le point m décrit la droite d'équation $y = x - 1$, privée du point A, alors le point M appartient aux courbes suivantes privées du point A :
a. un cercle ;
b. la droite d'équation $y = x$;
c. la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$;
d. une droite parallèle à celle décrite par m ;
e. une droite perpendiculaire à celle décrite par m.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**
Si m décrit la droite d'équation $y = x - 1$, alors $z = x + \mathrm{i}(x-1)$,

et donc $Z = \frac{x+1+\mathrm{i}(x-1)}{x-1+\mathrm{i}(x-1)}$ pour $x \neq 1$.

Z s'écrit aussi
$$Z = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1+\mathrm{i}(x-1)}{1+\mathrm{i}}$$
$$Z = \frac{1-\mathrm{i}}{x-1} \cdot \frac{x+1+\mathrm{i}(x-1)}{2}$$
$$Z = \frac{1}{2(x-1)} \cdot (x+1+\mathrm{i}(x-1) - \mathrm{i}(x+1) + (x-1)).$$
$$Z = \frac{1}{2(x-1)} \cdot (2x + \mathrm{i}(-2))$$
$$Z = \frac{1}{2(x-1)} \cdot 2[x - \mathrm{i}] \text{ pour } x \neq 1.$$

La partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z sont alors $X = \frac{x}{x-1}$ et $Y = \frac{-1}{x-1}$, pour $x \neq 1$, ce qui permet d'écrire $X + Y = 1$ ou $Y = -X + 1$.

Donc, si m décrit la droite d'équation $y = x - 1$, alors M appartient à la droite d'équation $Y = -X + 1$ qui est perpendiculaire à celle décrite par m.

▶ **4.** **a.** Soit j le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $j^{1996} + j^{1997} + j^{1998} = 1$.

b. Si un argument du nombre complexe non nul z est α, alors un argument de $-\frac{4}{z}$ est $-\alpha$.

c. Soit z un nombre complexe non nul. Si $\frac{z}{\bar{z}}$ est un réel positif, alors z est réel.

d. Soit z un nombre complexe. Si $|z| = 1$, alors il existe un entier naturel non nul n tel que $z^n = 1$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. $j^{1996} + j^{1997} + j^{1998} = j^{1996}(1 + j + j^2)$; comme $1 + j + j^2 = 0$ nous avons $j^{1996} + j^{1997} + j^{1998} = 0$ et non 1.

b. Pour tout complexe non nul nous savons, d'après le cours, que si un argument de z est α, alors $\frac{1}{z}$ a pour argument $-\alpha$ et $-\frac{1}{z}$ a pour argument $-\alpha + \pi$, ce qui montre que la réponse proposée est fausse.

c. Si $\frac{z}{\bar{z}}$ est un réel positif, alors il existe un réel positif k tel $\frac{z}{\bar{z}} = k$, soit $z = k\bar{z}$, donc $\bar{z} = k\bar{\bar{z}}$, c'est-à-dire $\bar{z} = kz$ alors $z = k^2 z$, d'où $k = 1$ puisque $z \neq 0$ et $k \geqslant 0$ donc $z = \bar{z}$.

On n'a $\frac{z}{\bar{z}} = 1$ que dans le cas où z est un réel non nul.

d. Le complexe $z = \cos 2 + i \sin 2 = e^{2i}$ a pour module 1, et il n'existe pas d'entier naturel n tel que $z^n = 1$.

▶ **5.** Soit les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

On note A le point du plan d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2.

a. Un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{3}$.

b. Il existe une rotation de centre O transformant A en B.

c. On a : $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

d. L'ensemble E des point M d'affixe z tel que $z_2 z + \overline{z_2 z} + 1 = 0$ est la droite d'équation $x + y = -\frac{1}{2}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$, un argument α de z_1 vérifie $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, soit $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ce qui est contradictoire avec la proposition.

b. $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, d'où

$z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}z_1$ et B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{12}$.

c. $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ en utilisant les calculs de **b.**

d. $z_2 z + \overline{z_2 z}$ est la somme de deux complexes conjugués.

$z_2 z + \overline{z_2 z} = 2\mathcal{R}\mathrm{e}(zz_2)$, or $z_2 z = (1 - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}x + y$ et alors $2\mathcal{R}\mathrm{e}(z_2 z) = 2(x + y)$.

L'ensemble E cherché a pour équation $2(x + y) + 1 = 0$, soit $x + y = -\frac{1}{2}$.

▶ **6.** i désignant le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\frac{\pi}{2}$, alors :

a. $\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \mathrm{i}$; **b.** $\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$; **c.** $\frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$;

d. $\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **e.** $\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(1 + \mathrm{i})^2}{2}$, soit $\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$. La réponse est correcte.

b. $\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i})}{2}$, soit $\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}$

$\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, donc le module de $\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}$ est $\sqrt{2}$ et l'on ne peut conclure pour l'instant.

Or $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$,

donc la réponse **b.** est correcte.

c. D'après le calcul précédent et les propriétés de la conjugaison, on peut dire que la réponse **c.** est correcte.

d. D'après des calculs effectués précédemment nous avons : $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

D'où $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$. La réponse est correcte.

e. $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. La réponse est correcte.

▶ **7.** Soit $z=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ alors :

a. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; **b.** $z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; **c.** z est solution de l'équation $Z^3-1=0$;
d. z est solution de l'équation $Z^3+1=0$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

$\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2}{4}$, soit $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc la réponse **a.** est fausse et la réponse **b.** est correcte.
$z^3=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}=-1$. Donc $z^3+1=0$. La réponse **c** est fausse et la réponse **d.** est correcte.

▶ **8.** L'équation : $\mathrm{i}z^2+(1-5\mathrm{i})z+6\mathrm{i}-2=0$ admet pour solutions complexes :
a. $z'=-2$; $z''=-3-\mathrm{i}$; **b.** $z'=-2$; $z''=-3+\mathrm{i}$;
c. $z'=2$; $z''=-3+\mathrm{i}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux.**

■ **Justifications :**
Il suffit de remplacer z par les valeurs proposées pour constater que les couples de solutions proposées ne conviennent pas. Les solutions sont 2 et $3+\mathrm{i}$.

▶ 9. On pose $z=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ alors :

a. il existe (au moins) un entier $n \geqslant 1$ tel que $z^n \in \mathbb{R}$;

b. il existe (au moins) un entier $n \geqslant 1$ tel que z^n est un imaginaire pur ;

c. pour tout entier naturel n, on a $z^{n+4}=\frac{1}{4}z^n$;

d. pour tout entier naturel n, on a $z^n+\bar{z}^n=2^{1-\frac{n}{2}}(-1)^n\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. $z=\frac{1}{2}(-1+i)=\frac{1}{2}(\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Donc, par exemple, pour $n=4$, $z^4=-\frac{1}{4}$ qui est bien un nombre réel (il existe d'autres possibilités).

b. Pour $n=2$ (il existe d'autres possibilités), on a $z^2=-\frac{1}{2}i$ qui est bien un imaginaire pur.

c. Pour tout entier naturel n, $z^{n+4}=z^nz^4$, avec $z^4=-\frac{1}{4}$, donc $z^{n+4}=-\frac{1}{4}z^n$, ce qui ne correspond pas à la solution proposée en **c.**

d. Pour tout entier naturel n : $z^n+\bar{z}^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^n$

$$z^n+\bar{z}^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(e^{i\frac{3n\pi}{4}}+e^{-i\frac{3n\pi}{4}}\right)$$

$$z^n+\bar{z}^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(2\cos\frac{3n\pi}{4}\right).$$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2}=2^{-\frac{1}{2}}$, donc $z^n+\bar{z}^n=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^n(2)\left(\cos\frac{3n\pi}{4}\right)$.

Or $\cos\frac{3n\pi}{4}\neq(-1)^n\cos\frac{3\pi}{4}$, (par exemple $\cos\frac{3\pi}{2}\neq(-1)^2\cos\frac{3\pi}{4}$)

$z^n+\bar{z}^n$ ne vérifie donc pas la proposition.

▶ 10. Soit θ un réel quelconque et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z :

$$z^2-e^{-\theta}z+e^{-2\theta}=0.$$

On note z' et z'' les racines de (E) :

a. pour tout réel θ, (E) a deux solutions complexes non réelles distinctes ;

b. pour tout réel θ, on a $\dfrac{1}{z'} + \dfrac{1}{z''} = e^{\theta}$;

c. pour tout réel θ, on a $|z'| = |z''| = e^{-2\theta}$;

d. pour tout réel θ, on a $e^{-2\theta} - 1 - ie^{-\theta} = (i - z')(i - \overline{z'})$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. (E) est une équation du second degré à coefficients réels avec un discriminant strictement négatif égal à $-3e^{-2\theta}$ donc (E) admet deux solutions complexes non réelles conjuguées.

b. $\dfrac{1}{z'} + \dfrac{1}{z''} = \dfrac{z' + z''}{z'z''}$ avec $z' + z'' = e^{-\theta}$ et $z'z'' = e^{-2\theta}$,

donc $\dfrac{1}{z'} + \dfrac{1}{z''} = \dfrac{e^{-\theta}}{e^{-2\theta}} = e^{\theta}$. La réponse fournie est correcte.

c. Nous savons que $z'z'' = e^{-2\theta}$, donc $|z'||z''| = e^{-2\theta}$, et $|z'| = |z''|$ car $z'' = \overline{z'}$, alors ce module commun est égal à $e^{-\theta}$. La réponse fournie est fausse.

d. $(i - z')(i - \overline{z'}) = i^2 - i\overline{z'} - iz' + z'\overline{z'}$,

$(i - z')(i - \overline{z'}) = -1 - i(z' + \overline{z''}) + z'z''$ car $\overline{z'} = z''$.

$(i - z')(i - \overline{z'}) = -1 - ie^{-\theta} + e^{-2\theta}$ ce qui correspond au résultat proposé.

▶ **11.** À tout point M du plan, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$. Alors :

a. l'application du plan f : M $\mapsto$ M′ est une homothétie de rapport 2 ;

b. l'ensemble (E) des points M tels que z' soit réel est l'axe $(O\,;\,\vec{u})$;

c. l'ensemble (E') des points M tels que z' est imaginaire pur est contenu dans un cercle (E'') ;

d. l'ensemble (E'') est le cercle d'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Si f était une homothétie de rapport 2, alors on aurait $z' = 2z + b$, où b est un complexe indépendant de z. La réponse proposée est fausse.

b. Le complexe z' est un réel si, et seulement si $z' = \overline{z'}$.

Ceci se traduit, pour $z \neq 1$, par :

$$\frac{2z+1}{z-1} = \frac{2\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$$

$$(2z+1)(\bar{z}-1) = (z-1)(2\bar{z}+1)$$

$$2z\bar{z} - 2z + \bar{z} - 1 = 2z\bar{z} + z - 2\bar{z} - 1$$

$$0 = 3z - 3\bar{z}$$

$$z = \bar{z}.$$

L'ensemble des point M tels que z' est un réel est alors l'axe $(\text{O} ; \vec{u})$ privé du point d'abscisse 1, ce qui ne correspond pas à la réponse fournie.

c. Le complexe z' est un imaginaire pur si, et seulement si, $z' = -\overline{z'}$.

Ceci se traduit, pour $z \neq 1$, par :

$$\frac{2z+1}{z-1} = -\frac{2\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$$

$$(2z+1)(\bar{z}-1) = -(z-1)(2\bar{z}+1)$$

$$2z\bar{z} - 2z + \bar{z} - 1 = -2z\bar{z} - z + 2\bar{z} + 1$$

$$4z\bar{z} - z - \bar{z} - 2 = 0$$

$4(x^2 + y^2) - 2x - 2 = 0$, pour $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réel et $(x , y) \neq (1 ; 0)$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}.$$

L'ensemble (E') est donc le cercle de centre $\text{I}\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$ et de rayon $\frac{3}{4}$ privé du point de coordonnées $(1 ; 0)$.

L'ensemble (E') est bien contenu dans un cercle qui n'est pas (E'').

▶ **12.** Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 1 et les points B et C d'affixes respectives b et c solutions de l'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. (b est la solution ayant la partie imaginaire positive). Alors :

a. A, B, C sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1 ;

b. les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ;
c. OBC est un triangle équilatéral ;
d. soit Z le nombre complexe de module $2+\sqrt{3}$ dont un argument est $\frac{\pi}{12}$, alors $b-1=Zb$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Dire que A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 1 équivaut à dire que les modules des affixes respectives de ces points sont égaux à 1. Or, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, donc $|b|=1$ et $c=\bar{b}$, d'où $|c|=1$.
Comme A a pour affixe 1, la conclusion fournie est correcte.
b. b et c sont des solutions complexes conjuguées de l'équation fournie, donc les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
c. $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ et $\mathrm{BC}=|b-c|$, soit $\mathrm{BC}=|\mathrm{i}|=1$, donc le triangle OBC est un triangle équilatéral.
d. Nous avons : $b-1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}-1$, soit $b-1=-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.
Par suite, $|b-1|=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{2}$, alors que $|Zb|=|Z||b|=2+\sqrt{3}$, ce qui prouve que la solution proposée est incorrecte.

▶ **13. a.** L'équation $Z^4=1$ a une racine réelle double et deux racines complexes conjuguées.

b. Soit l'équation à coefficient réels $\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^4=1$ (E). L'ensemble des solutions de l'équation (E) est contenu dans : $\left\{0\,;1-\mathrm{i}\,;\frac{1+\mathrm{i}}{2}\,;\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right\}$.

c. Le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^4=1$ est quatre.

d. L'ensemble des points d'affixe z tel que : $\left|\left(\frac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^4\right|=1$ est un cercle.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. L'équation $Z^4=1$ s'écrit aussi : $(Z^2+1)(Z^2-1)=0$

$$(Z-\mathrm{i})(Z+\mathrm{i})(Z-1)(Z+1)=0.$$

Les solutions complexes sont bien conjuguées, mais il y a deux solutions réelles opposées 1 et –1.

b. L'équation (E) équivaut à $\begin{cases} Z^4 = 1 \\ Z = \dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} \end{cases}$.

D'après la question précédente nous savons que
$Z = 1$ ou $Z = -1$ ou $Z = \mathrm{i}$ ou $Z = -\mathrm{i}$.

Pour $Z = 1$, nous avons $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} = 1$, équation qui n'admet pas de solution.

Pour $Z = -1$, nous avons $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} = -1$, qui s'écrit $z - 1 = -z - \mathrm{i}$ soit $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$.

Pour $Z = \mathrm{i}$, nous avons $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, qui s'écrit $z - 1 = \mathrm{i}z - 1$ soit $z = 0$.

Pour $Z = -\mathrm{i}$, nous avons $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, qui s'écrit $z - 1 = -\mathrm{i}z + 1$ soit $z = 1 - \mathrm{i}$.

L'ensemble des solutions de (E) est bien inclus dans $\left\{0, 1-\mathrm{i}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}, \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right\}$.

c. (E) admet trois solutions.

d. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|\left(\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right)^4\right| = 1$ coïncide avec celui des points M dont l'affixe z vérifie, $\left|\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right|^4 = 1$, c'est-à-dire $\left|\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right| = 1$ ou encore $\dfrac{|z-1|}{|z+\mathrm{i}|} = 1$. L'ensemble recherché n'est pas un cercle puisqu'il correspond à un ensemble inclus dans la médiatrice d'un segment.

▶ **14.** Dans le plan d'un repère $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M d'affixe a et N d'affixe b tels que a et b sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 3 = 0$. Alors :

a. $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = ab$;

b. $a + b$ est un nombre réel ;

c. le milieu de [MN] est sur l'axe des abscisses ;

d. la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées ;

e. M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Les solutions de l'équation proposée sont : $1+i\sqrt{2}$ et $1-i\sqrt{2}$.

On a : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-1$ et :

$ab=(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})=3$, donc le résultat proposé est faux.

b. a et b étant deux complexes conjugués, il s'ensuit que $a+b$ est un réel (en l'occurrence 2).

c. Les points M et N d'affixes conjuguées sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc le milieu de [MN] est situé sur l'axe des abscisses.

d. La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées d'après le résultat **c.**

e. $|a|=|b|=\sqrt{3}$ donc $OM=ON=\sqrt{3}$. Les points M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. Le résultat proposé est faux.

▶ **15.** **a.** Soit a, b, c et d quatre réels avec $a\neq 0$.
L'équation $az^3+bz^2+cz+d=0$ peut avoir une racine complexe non réelle et une seule. On considère, pour $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=z^3+3z^2+3z+2$.

b. On a $f(z)=(z+2)\left(z-\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

On note A, B et C les points dont l'affixe est solution de l'équation $f(z)=0$.

c. Le module du produit des affixes de A, B et C est égal à 2.

d. Le triangle ABC (voir **c**) est isocèle rectangle.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. L'équation $z^3-iz^2=0$ admet une racine complexe non réelle et une seule, en l'occurrence $z=i$ (en réalité il fallait partir de $(z-i)z^2$ pour obtenir l'exemple proposé).

b. $$(z+2)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=(z+2)(z^2+z+1)$$

$$(z+2)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=z^3+z^2+z+2z^2+2z+2$$

$$(z+2)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=z^3+3z^2+3z+2,\text{ soit } f(z).$$

c. Ce résultat est correct car l'une des solutions étant -2, son module est 2 et les deux autres solutions sont des complexes de module 1.

d. A a pour affixe -2, B a pour affixe $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et C a pour affixe $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

A étant situé sur l'axe des abscisses, B et C étant symétriques par rapport à cet axe, il s'ensuit que $AB = AC$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}\\[2mm] -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2},$$

donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

16. Soit l'équation $z^3 - iz^2 + (1-i)z + 2i - 2 = 0$.

a. L'équation a une solution réelle négative.
b. L'équation n'a pas de solution réelle.
c. L'équation a une solution de la forme ib avec b réel négatif.
d. L'équation a une solution de la forme ib avec b réel positif.
e. L'équation a trois solutions réelles.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Le réel négatif x est solution de l'équation proposée si, et seulement si :

$$x^3 - ix^2 + (1-i)x + 2i - 2 = 0$$
$$x^3 + x - 2 + i(-x^2 - x + 2) = 0$$

ce qui équivaut à $x^3 + x - 2 = 0$ **et** $-x^2 - x + 2 = 0$ puisque x est un réel. Ces deux équations n'ont aucune solution réelle négative en commun. La réponse est incorrecte.

b. Le réel x est solution de l'équation proposée si, et seulement si, en utilisant les calculs précédents, $x^3 + x - 2 = 0$ et $-x^2 - x + 2 = 0$, ce qui donne $x = 1$. La réponse proposée est fausse.

c. Le complexe ib, avec b réel négatif, est solution si, et seulement si :

$$(ib)^3 - i(ib)^2 + (1-i)(ib) + 2i - 2 = 0$$
$$-ib^3 + ib^2 + ib + b + 2i - 2 = 0$$
$$(b-2) + i(-b^3 + b^2 + b + 2) = 0,$$

ce qui équivaut à $b - 2 = 0$ **et** $-b^3 + b^2 + b + 2 = 0$.

La solution cherchée est de la forme $2i$, donc la réponse fournie est incorrecte. En revanche, la réponse **d.** convient et par conséquent **e.** ne convient pas.

▶ 17. Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.

a. $\overline{\left(\dfrac{1}{z^{12}}\right)} = \dfrac{1}{64}$; **b.** $z^{30} = 2^{15}$; **c.** $\bar{z} = -z$; **d.** $(\mathrm{i}z)^{15} \in \mathbb{R}$;

e. $z^{12k} \in \mathbb{R}$, pour k entier naturel non nul.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$, soit $z = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$, soit $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$,

donc $z^{12} = (\sqrt{2})^{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -(\sqrt{2})^{12}$.

$\dfrac{1}{z^{12}} = -(\sqrt{2})^{-12} = -2^{-6}$, donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z^{12}}\right)} = -\dfrac{1}{64}$, la réponse fournie est fausse.

b. $z^{30} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{30}$, soit $z^{30} = 2^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = 2^{15}\mathrm{i}$, la réponse fournie est fausse.

c. D'après **a.**, z n'est pas un imaginaire pur donc $\bar{z} \neq -z$.
La réponse fournie est incorrecte.

d. $\mathrm{i}z = \mathrm{i}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$ ou encore $\mathrm{i}z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,

c'est-à-dire $\mathrm{i}z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

Il s'ensuit que $(\mathrm{i}z)^{15} = (\sqrt{2})^{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{35\pi}{4}}$, or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{35\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $(\mathrm{i}z)^{15} \notin \mathbb{R}$.

e. $z^{12k} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12k} = (\sqrt{2})^{12k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$ or, pour tout entier naturel k, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$ est un réel, donc la réponse proposée est correcte.

▶ 18. Soit $z = \dfrac{ia+1}{ia-1}$, $a \in \,]0\,;1[$. r désigne le module de z et θ l'argument de z compris entre 0 et 2π. Alors :

a. $r = \sqrt{\dfrac{1+a^2}{1-a^2}}$ et $\theta \in \left[\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$; **b.** $r = \sqrt{\dfrac{1+a^2}{1-a^2}}$ et $\theta = \pi$;

c. $r = 1$ et $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$; **d.** $r = 1$ et $\theta = \pi$; **e.** $r = 1$ et $\theta \in \left[\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $|z| = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$, donc la réponse proposée est incorrecte.

b. Nous déduisons du résultat précédent que la réponse fournie est incorrecte.

c. Soit $w = \mathrm{i}a + 1$. Puisque $a \in]0\,;1[$, il existe un unique réel $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $a = \tan\alpha$.

Alors, $w = \mathrm{i}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$,

donc $z = -\dfrac{w^2}{w\overline{w}}$ et $\arg(z) = 2\alpha + \pi \quad (2\pi)$,

puisque $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ et $\pi < 2\alpha + \pi < \dfrac{3\pi}{2}$, soit $\theta \in \left]\pi\,;3\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Les réponses **c.** et **d.** sont fausses à cause de la nature de l'intervalle.

La réponse **e.** est correcte.

▶ **19.** Soit $f(z) = \dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{z-1+\mathrm{i}}$ et (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$. Alors :

a. (E) est le cercle trigonométrique ;

b. (E) est une droite passant par le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$;

c. (E) est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ avec $\mathrm{A}(-1\,;2)$ et $\mathrm{B}(1\,;-1)$;

d. (E) est un segment de droite.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

$|f(z)| = 1$ équivaut à $|z+1-2\mathrm{i}| = |z-1+\mathrm{i}|$, avec $z \neq 1-\mathrm{i}$

$|z-(-1+2\mathrm{i})| = |z-(1-\mathrm{i})|$, avec $z \neq 1-\mathrm{i}$.

(E) est la médiatrice du segment dont les extrémités sont les points d'affixes respectives $-1+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

Les réponses **a.**, **c.** et **d.** sont donc incorrectes.

b. Le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ a pour affixe $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\left|\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ et $\left|\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-1+\mathrm{i}\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, donc ce point appartient à (E).

La réponse **b.** est correcte.

SUJETS Se préparer à l'examen

EXOS Exercices d'application

1 Soit le nombre complexe :

$$A = (2-3\mathrm{i})^2 - \frac{5+2i}{\mathrm{i}} - (2+\mathrm{i})(3-5\mathrm{i}) + 12\mathrm{i}(1+\mathrm{i}).$$

Calculer A et le mettre sous la forme algébrique.

2 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a + \mathrm{i}\,b$, avec a et b réels :

1. $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}-7}{3+7\mathrm{i}}$; **2.** $z_2 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$; **3.** $z_3 = \dfrac{1+18\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} + \dfrac{7-26\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$.

3 Soit le nombre complexe $z = 2 - \mathrm{i}$. Écrire sous la forme algébrique $(a + \mathrm{i}b)$, avec a et b réels, les complexes suivants.

1. $\dfrac{1}{z}$. **2.** $\dfrac{\bar{z}}{z}$. **3.** $\dfrac{1}{z^2}$. **4.** $\dfrac{2-z}{2+z}$. **5.** $z^2 + z$. **6.** $\mathrm{i}z^2 - z(1+\mathrm{i})$.

4 Déterminer le conjugué de chacun de ces nombres complexes.

1. $z_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

3. $z_3 = 1 + \mathrm{i}z_0$, où $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. $z_4 = \mathrm{i}(3+4\mathrm{i})^5$.

5 Démontrer que si λ est réel, alors le nombre complexe $z = \dfrac{1+\lambda\mathrm{i}}{1-\lambda\mathrm{i}}$ a pour module 1.

6 Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants, où r désigne le module et θ un argument.

1. $z = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. **2.** $z = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. **3.** $z = \dfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

4. $z = \frac{1}{4}e^{i4\pi}$. **5.** $z = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ avec $\alpha = 60°$. **6.** $z = e^{i\pi}$.

7 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = -6i$; $Z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_4 = -\sqrt{3} + i$;

$Z_5 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$; $Z_6 = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$; $Z_7 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

$Z_8 = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$; $Z_9 = i\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

8 **1.** Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant :

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2i\overline{z_1} + \overline{z_2} = 0. \end{cases}$$

2. Trouver le module et un argument de z_1 et z_2.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Quelle est l'application r de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ associée à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

2. Même question que précédemment pour la rotation de centre A d'affixe $\frac{3}{2} - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

10 Soit un plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2, déterminer à quelle condition (exprimée uniquement en fonction de z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$) les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires.

2. Retrouver analytiquement cette condition à l'aide des parties réelles et imaginaires de chacun des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

3. Examiner la réciproque et interpréter géométriquement la condition obtenue.

11 Soit A, B et C trois points du plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dont l'origine O est le milieu de $[BC]$, l'axe $(O ; \vec{e}_1)$ étant porté par (BC).

Soit a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

1. Montrer que $c = -b$.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur b et a pour que ABC soit un triangle isocèle en A.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur b et a pour que ABC soit un triangle rectangle en A.

12 En utilisant les nombres complexes, démontrer les propriétés suivantes :

1. les diagonales d'un carré sont de longueur égale et perpendiculaires;

2. les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

13 Soit un plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2, déterminer la condition nécessaire et suffisante (exprimée uniquement en fonction de z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$) pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ soient orthogonaux.

2. Retrouver analytiquement cette condition à l'aide des parties réelles et imaginaires de chacun des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

3. En déduire l'expression sous forme complexe du produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

14 Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère un point A d'affixe a et un vecteur $\vec{V}$ non nul d'affixe v. Déterminer sous forme complexe une équation de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{V}$.

2. Deux points A et B distincts ont pour affixes respectives a et b. Déterminer sous forme complexe une équation de la droite (D) passant par A et B.

3. Déterminer sous forme complexe une condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c soient alignés.

4. En déduire l'équation d'une droite sous forme complexe.

15 Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, à tout point M de coordonnées $(x ; y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M.

1. Étant donné un nombre complexe non nul $w = u + iv$ et un réel l, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie $\overline{w}z + w\overline{z} - l = 0$.

2. Soit (D) une droite dont une équation est $ax + by + c = 0$ avec a, b, c réels et $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Trouver un nombre complexe non nul w et un réel l, tels que (D) soit l'ensemble des points de (P) dont l'affixe vérifie : $\overline{w}z + w\overline{z} - l = 0$.

EXOS Exercices de synthèse

16 À tout point M du plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on associe son affixe $z = x + iy$ avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = 3(1 + i\sqrt{3}), \qquad Z_B = \frac{1}{2}(9 + 5i\sqrt{3}) \qquad \text{et} \qquad Z_C = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

1. Déterminer l'affixe du barycentre G du système pondéré

$$\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}.$$

2. Déterminer les affixes des transformés A′, B′ et C′ des trois points A, B et C par la rotation dont le centre est G et l'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3. Démontrer, en utilisant le résultat précédent, que ABC est un triangle rectangle.

17 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
Soit z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative et z_2 l'autre.

2. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_2 + 1}{z_1 + 1}$.

En déduire son module et son argument.

3. A étant le point d'affixe z_1, B d'affixe z_2 et C d'affixe -1, déduire du résultat précédent la nature du triangle ABC.

18 Dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point M d'affixe $z = x + iy$ avec $z \neq 0$ et le point M′ d'affixe $z' = \frac{1}{z}$.

Exprimer les coordonnées de M′ en fonction de x et y.

Soit A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, C le point d'affixe -1 et D le point d'affixe $-2-i$.

Calculer $z'_B = \frac{1}{z_B}$ et $z'_D = \frac{1}{z_D}$ affixes des images B′ et D′ de B et D.

Montrer que O, B et B′ sont alignés ainsi que O, D et D′.

Montrer que A, B′, C et D′ sont situés sur un cercle de centre B.

19 Déterminer algébriquement l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

1. $Z = \frac{z+1}{z-2i}$ soit réel;

2. Z soit imaginaire pur;

3. un argument de Z soit $\frac{\pi}{2}$.

BAC *L'épreuve*

20 **1.** Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

a. Factoriser $P(Z)$.

b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.

c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (l'unité graphique est 5 cm).

Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$$

b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

En déduire le rapport $\frac{\text{CA}}{\text{CD}}$.
Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

21 Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1, d'affixes respectives :
$a_0 = 1$; $a_1 = e^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1. a. Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
b. Soit I le milieu du segment $[\text{A}_0\text{A}_2]$. Calculer l'affixe du point I.
c. Faire une figure.

2. a. Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.

c. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 Décomposons les calculs :

$(2-3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$\dfrac{5+2i}{i} = \dfrac{(5+2i)(-i)}{1} = -5i + 2$

$(2+i)(3-5i) = 11 - 7i$

$12i(1+i) = 12i - 12.$

Finalement $A = -5 - 12i + 5i - 2 - 11 + 7i + 12i - 12.$

$\mathbf{A = -30 + 12i}$ et $\mathcal{R}e(A) = -30$, $\mathcal{I}m(A) = 12.$

2 **a.** $z_1 = \dfrac{(i-7)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)}$, $3-7i$ étant le conjugué de $3+7i$

$z_1 = \dfrac{52i - 14}{9+49}$, car $z\bar{z} = a^2 + b^2$ pour $z = a + ib$ avec a et b réels

$z_1 = \dfrac{52i-14}{58} = -\dfrac{14}{58} + \dfrac{52}{58}i.$

$z_1 = -\dfrac{7}{29} + \dfrac{26}{29}i$ avec $\mathcal{R}e(z_1) = -\dfrac{7}{29}$ et $\mathcal{I}m(z_1) = \dfrac{26}{29}.$

b. $z_2 = \dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - \dfrac{(3-i)(2-i)}{(2-i)(2+i)}$

$z_2 = \dfrac{5+5i}{10} - \dfrac{5-5i}{5} = \dfrac{1+i}{2} - (1-i)$

$z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ avec $\mathcal{R}e(z_2) = -\dfrac{1}{2}$ et $\mathcal{I}m(z_2) = \dfrac{3}{2}.$

On aurait pu, au préalable, réduire au même dénominateur, mais cela ne présentait ici aucun intérêt particulier car $3-i$ et $2-i$ ne sont pas conjugués.

c. $z_3 = \dfrac{1+18i}{3+4i} + \dfrac{7-26i}{3-4i}.$

Ici, la réduction au même dénominateur est intéressante car $\overline{3+4i} = 3-4i$

$z_3 = \dfrac{(1+18i)(3-4i) + (7-26i)(3+4i)}{(3+4i)(3-4i)}$

$$z_3 = \frac{3 - 4i + 54i + 72 + 21 + 28i - 78i + 104}{9 + 16} = \frac{200}{25}.$$

$z_3 = 8$ avec $\mathcal{R}e(z_3) = 8$ et $\mathcal{I}m(z_3) = 0$.

3 **1.** $\frac{1}{z} = \frac{1}{2 - i}$, soit $\frac{1}{z} = \frac{2 + i}{4 + 1}$, donc $\mathbf{\frac{1}{z} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i}$.

2. $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{2 + i}{2 - i}$, soit $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(2 + i)^2}{5} = \frac{4 + 4i - 1}{5}$, donc $\mathbf{\frac{\bar{z}}{z} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$.

3. $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4 - 4i - 1}$, soit $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{3 - 4i}$

$\frac{1}{z^2} = \frac{3 + 4i}{25}$, donc $\mathbf{\frac{1}{z^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i}$.

4. $\frac{2 - z}{2 + z} = \frac{2 - 2 + i}{2 + 2 - i}$, soit $\frac{2 - z}{2 + z} = \frac{i}{4 - i}$

$\frac{2 - z}{2 + z} = \frac{i(4 + i)}{17} = \frac{-1 + 4i}{17}$, donc $\mathbf{\frac{2 - z}{2 + z} = -\frac{1}{17} + \frac{4}{17}i}$.

5. $z^2 + z = (2 - i)^2 + 2 - i$

$z^2 + z = 4 - 4i - 1 + 2 - i$, soit $\mathbf{z^2 + z = 5 - 5i}$.

6. $iz^2 - z(1 + i) = i(2 - i)^2 - (2 - i)(1 + i)$

$iz^2 - z(1 + i) = i(4 - 1 - 4i) - 2 - 2i + i + i^2$

$iz^2 - z(1 + i) = (3 - 4i)i - 3 - i$

soit $\mathbf{iz^2 - z(1 + i) = 1 + 2i}$.

4 Pour $z = a + ib$ avec a et b réels, nous avons $\bar{z} = a - ib$.

1. $\mathbf{\bar{z}_1 = 1 + i\sqrt{3}}$.

2. $\bar{z}_2 = \overline{\left(\frac{1 + i}{1 + 2i}\right)}$.

Or $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ pour $z' \neq 0$, donc $\bar{z}_2 = \frac{1 - i}{1 - 2i}$.

$\bar{z}_2 = \frac{(1 - i)(1 + 2i)}{5}$

$\mathbf{\bar{z}_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i}$.

3. $\bar{z}_3 = 1 + \overline{iz_0}$.

Or $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$, donc $\bar{z}_3 = 1 + \bar{i} \cdot \bar{z}_0$ avec $\bar{i} = -i$ soit $\mathbf{\bar{z}_3 = 1 - i \cdot \bar{z}_0}$.

4. $\overline{z_4} = \overline{\mathrm{i}} \cdot \overline{(3+4\mathrm{i})^5}$, car $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

$\overline{z_4} = -\mathrm{i} \cdot \overline{(3+4\mathrm{i})^5}$. Or $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc $\overline{z_4} = -\mathrm{i} \cdot (\overline{3+4\mathrm{i}})^5$.

$\overline{z_4} = \mathbf{-i(3-4i)^5}$ ou $\overline{z_4} = \mathbf{-(4+3i)^5}$ puisque $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$.

5 Nous avons $|z|^2 = z\overline{z}$.

D'où $z\overline{z} = \dfrac{1+\lambda\mathrm{i}}{1-\lambda\mathrm{i}} \times \dfrac{1-\lambda\mathrm{i}}{1+\lambda\mathrm{i}}$;

$z\overline{z} = 1$ et donc $|z| = \mathbf{1}$.

Attention : pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\overline{1+\lambda\mathrm{i}} = 1 - \overline{\lambda}\mathrm{i}$.

6 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'écrit également $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

1. $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, donc $z = 3(0+\mathrm{i})$, soit $z = \mathbf{3i}$.

2. $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, car $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3}$

$z = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, soit $z = \mathbf{1 - i\sqrt{3}}$.

3. $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $z = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$.

4. $z = \dfrac{1}{4}(\cos 4\pi + \mathrm{i}\sin 4\pi)$. Or $\cos 4\pi = 1$ et $\sin 4\pi = 0$, donc :

$z = \dfrac{1}{4}(1 + 0\mathrm{i})$, soit $z = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$.

5. $z = \dfrac{1}{2}(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°)$.

$z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ soit $z = \mathbf{\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$.

6. $z = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$
$z = 1(-1 + 0\mathrm{i})$ soit $z = \mathbf{-1}$.

7 • $|Z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2}$, soit $|Z_1| = \sqrt{2}$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$, soit $Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$.

Si θ désigne un argument de Z_1, nous avons :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Z_1 est le complexe de module $\sqrt{2}$ dont un argument est $\frac{\pi}{4}$.

Cet exemple met en évidence une méthode.

Après avoir calculé $|Z|$, il suffit de mettre $|Z|$ en facteur dans l'écriture de Z ; l'autre facteur est nécessairement $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, θ désignant un argument de Z.

• $|Z_2| = 6$, donc $Z_2 = 6(0 - \mathrm{i})$,

d'où $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$, θ désignant un argument de Z_2, soit $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Z_2 est le complexe de module 6 dont un argument est $-\frac{\pi}{2}$.

• $|Z_3| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2}$, soit $|Z_3| = 2$.

$Z_3 = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où, si θ désigne un argument de Z_3,

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Remarquons aussi que : $\overline{Z}_3 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $|\overline{Z}_3| = 2$, $\arg\overline{Z}_3 = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Comme $|Z_3| = |\overline{Z}_3|$ et $\arg\overline{Z}_3 = -\arg Z_3 (2\pi)$,

nous avons : $\arg(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ (2π).

Z_3 est le complexe de module 2 dont un argument est $-\frac{\pi}{3}$.

• $Z_4 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$, donc $|Z_4| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1}$ soit $|Z_4| = 2$.

Z_4 s'écrit : $Z_4 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$; donc, si θ désigne un argument de Z_4,

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$, d'où $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Z_4 est le complexe de module 2 dont un argument est $\frac{5\pi}{6}$.

- $|Z_5| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}}$, soit $|Z_5| = 1$, car $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

$\overline{Z_5} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$: c'est le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\frac{\pi}{3}$. Or $\arg\bar{z} = -\arg z (2\pi)$.

Z_5 est le complexe de module 1 dont un argument est $-\frac{\pi}{3}$.

- $|Z_6| = \sqrt{\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}$ soit $|Z_6| = 1$.

$Z_6 = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$ ou $Z_6 = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$,

car $\begin{cases} \cos(\pi + a) = -\cos a \\ \sin(\pi + a) = -\sin a. \end{cases}$

Z_6 est le complexe de module 1, dont un argument est $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

- $|Z_7| = 2$ soit $Z_7 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

En utilisant le même procédé que précédemment, nous avons :

$Z_7 = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Z_7 est le complexe de module 2 dont un argument est $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

- En pratiquant comme pour Z_6, nous avons :

Z_8 est le complexe de module 1 dont un argument est $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

- $|Z_9| = |i| \times \left|\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right|$, car le module d'un produit de nombres complexes est égal au produit des modules de chacun de ces nombres complexes. En utilisant le même procédé que précédemment, nous avons :

$$|i| = 1, \quad \left|\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right| = 1 \text{ donc } |Z_9| = 1.$$

Un argument de i est $\frac{\pi}{2}$, un argument de $\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ est $-\frac{\pi}{6}$ puisque

$\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Or un argument d'un produit de nombres complexes est égal à la somme des arguments de chacun d'eux, donc $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ est un argument de Z_9.

Z_9 est le complexe de module 1 dont un argument est $\frac{\pi}{3}$.

8 Il serait très maladroit d'écrire z_1 et z_2 sous forme $a_1 - \mathrm{i}b_1$, et $a_2 - \mathrm{i}b_2$ avec a_1, b_1, a_2, b_2 réels, puis de substituer dans le système.

1. Le système $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2\mathrm{i}\overline{z_1} + \overline{z_2} = 0 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ \overline{(-2\mathrm{i}z_1 + z_2)} = 0 \end{cases}$

qui est équivalent au système $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2\mathrm{i}z_1 + z_2 = 0 \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} 2\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2 = 4\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i}z_1 + z_2 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z_2(1+\mathrm{i}) = 4\mathrm{i} \\ z_2 = 2\mathrm{i}z_1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ z_1 = \dfrac{z_2}{2\mathrm{i}} \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2} \\ z_1 = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}z_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z_1 = 1 - \mathrm{i} \\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \end{cases}$ donc $\mathcal{S} = \{1 - \mathrm{i}\ ,\ 2 + 2\mathrm{i}\}$.

2. $|z_1| = \sqrt{2}$ soit $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si θ désigne un argument de z_1, on a :

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

z_1 est le complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $-\frac{\pi}{4}$.

$|z_2| = \sqrt{4+4}$, soit $|z_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si α désigne un argument de z_2, alors $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

z_2 est le complexe de module $2\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{\pi}{4}$.

9 Nous savons que, si θ désigne un nombre réel, l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle θ est le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = z e^{i\theta}$.

Donc, ici, nous avons $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto z' = ze^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z.$$

Si θ désigne un nombre réel, l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre A d'affixe a est le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' - a = (z - a)e^{i\theta}.$$

Nous avons donc : $z' - \left(\frac{3}{2} - i\right) = \left(z - \frac{3}{2} + i\right)e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z' - \frac{3}{2} + i = ze^{-i\frac{\pi}{6}} + \left(-\frac{3}{2} + i\right)e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Or : $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Et donc : $z' - \frac{3}{2} + i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2} + i\right)$.

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

10 **1.** Dire que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires revient à déterminer un réel non nul λ tel que $\overrightarrow{V_1} = \lambda\overrightarrow{V_2}$ ce qui équivaut à $z_1 = \lambda z_2$ ou $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^*$ car z_2 est non nul. Un nombre complexe est réel si, et seulement si, $\frac{z_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ce qui équivaut à $\mathbf{z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0}$.

2. $\overrightarrow{V_1} = \lambda\overrightarrow{V_2}$ avec λ réel non nul équivaut à $x_1 + iy_1 = \lambda(x_2 + iy_2)$ c'est-à-dire $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Nous avons : $\overline{z_1}z_2 = (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 - x_2y_1)$

donc $\mathcal{I}m(\overline{z_1}z_2) = x_1y_2 - x_2y_1$. $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires pour $\mathcal{I}m(\overline{z_1}z_2) = 0$ ce qui amène $\boldsymbol{z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0}$.

3. $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0$ équivaut à $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. Comme aucun des vecteurs n'est nul, l'un des nombres x_1 ou y_1 n'est pas nul.

Si $x_1 \neq 0$ alors $y_2 = \dfrac{y_1x_2}{x_1} = y_1 \times \dfrac{x_2}{x_1}$ et $x_2 = x_2 \times \dfrac{x_2}{x_1}$ donc $\overrightarrow{V_2} = \dfrac{x_2}{x_1}\overrightarrow{V_1}$.

Si $y_1 \neq 0$ alors $x_2 = \dfrac{x_1y_2}{y_1} = x_1 \times \dfrac{y_2}{y_1}$ et $y_2 = y_1 \times \dfrac{y_2}{y_1}$ donc $\overrightarrow{V_2} = \dfrac{y_2}{y_1}\overrightarrow{V_1}$.

Dans les deux cas **$\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires**.

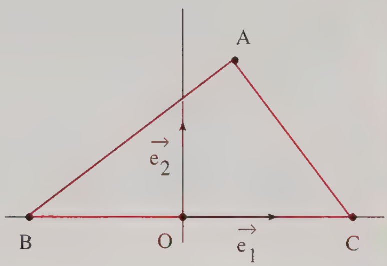
L'expression $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = x_1y_2 - x_2y_1$ représente **l'aire du parallélogramme construit à partir de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$** avec $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

11 **1.** O est le milieu de [BC],

donc $-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Par suite : $Z_{\overrightarrow{OB}} = -Z_{\overrightarrow{OC}}$

soit $-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.



2. $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $c - a = -b - a$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Par suite : $AC^2 = |-b-a|^2$

$AC^2 = (-b-a)(\overline{-b-a})$

$AB^2 = |b-a|^2$

$AB^2 = (b-a)(\overline{b-a})$

« ABC isocèle en A » équivaut à $AB^2 = AC^2$

$$(b-a)(\overline{b-a}) = (-b-a)(\overline{-b-a})$$

$$(b-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (-b-a)(-\bar{b}-\bar{a})$$

$$b\bar{b} - b\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{a} = b\bar{b} + b\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{a}$$

$$0 = 2a\bar{b} + 2\bar{a}b$$

or $\bar{b} = b$ (avec $b \neq 0$), car $b \in \mathbb{R}^*$ $\quad 0 = a\bar{b} + \bar{a}b$

$$0 = (a + \bar{a})b$$

$$\mathbf{0 = a + \bar{a}.}$$

3. Pour $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' :

$\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \bar{z}z')$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(Z_{\overrightarrow{AB}}\overline{Z_{\overrightarrow{AC}}} + \overline{Z_{\overrightarrow{AB}}}Z_{\overrightarrow{AC}})$

Or : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = b - a$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = -b - a$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[(-b-a)(\overline{b-a}) + (\overline{-b-a})(b-a)]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[(-b-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (-\bar{b}-\bar{a})(b-a)]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[-b\bar{b} + b\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{a} - \bar{b}b + \bar{b}a - \bar{a}b + a\bar{a}]$, avec $\bar{b} = b$

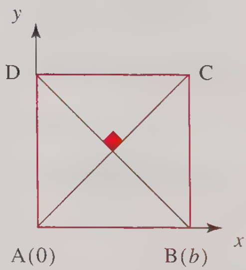
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(2a\bar{a} - 2b\bar{b})$, soit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\bar{a} - b^2$.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{b^2 = a\bar{a}}$.

12 **a.** Soit ABCD un carré.

Considérons le repère orthonormal direct d'origine A dont les axes sont portés par les droites (AB) et (AD).

L'affixe de A est $z_A = 0$, celle de B sera appelée b et, par suite, $z_C = b + ib$ et $z_D = ib$ puisque ABCD est un carré direct.



$\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AC}} = b + ib$

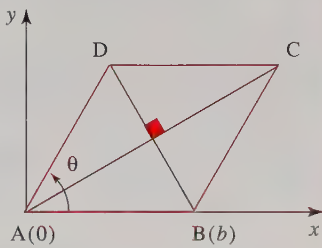
$\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{BD}} = \mathrm{i}b - b$.

Or : $\mathrm{i}b - b = \mathrm{i}b + \mathrm{i}^2 b = \mathrm{i}(b + \mathrm{i}b)$.

Donc $\overrightarrow{BD}$ est l'image de $\overrightarrow{AC}$ dans une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

D'où : $BD = AC$ (conservation des distances) et $(BD) \perp (AC)$.
Les diagonales d'un carré sont de même longueur et perpendiculaires.

b. Soit ABCD un losange.
Considérons le repère orthonormal direct d'origine A dont l'axe des abscisses est porté par (AB).



D est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle θ.

D'où : $z_D = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_B$, soit $z_D = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

De plus : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $z_{\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AD}}$.

De même : $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = (b - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

On utilise la formule $\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \bar{z}z')$

avec $\vec{U} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{BD}$ donc $z = b(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ et $z' = b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Alors :
$$\begin{aligned} z\overline{z'} + \bar{z}z' &= b(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + b(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= b^2[(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})] \\ &= b^2[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] = 0 \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

13 **1.** Dire que les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{V_1}$ **et** $\overrightarrow{V_2}$ **sont orthogonaux** revient à déterminer un réel non nul λ tel que $\overrightarrow{V_1} = \lambda \overrightarrow{V_2}$, ce qui se traduit par $z_1 = \mathrm{i}\lambda z_2$ soit $\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{i}\lambda$, car z_2 est non nul. Or, un nombre complexe est un imaginaire pur si, et seulement si, il est égal à l'opposé de son conjugué. Par conséquent, $\frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, ce qui équivaut à $\boldsymbol{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0}$.

2. La relation $\overrightarrow{V_1} = \mathrm{i}\lambda\overrightarrow{V_2}$ avec λ réel non nul est équivalente à $z_1 = \mathrm{i}\lambda z_2$,

c'est-à-dire $x_1 + \mathrm{i}y_1 = \mathrm{i}\lambda(x_2 + \mathrm{i}y_2)$ soit $\begin{cases} x_1 = -\lambda y_2 \\ y_1 = \lambda x_2 \end{cases}$,

ce qui équivaut à $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ qui est l'expression du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Nous avons : $\overline{z_1}z_2 = (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 - x_2y_1)$

donc $\mathcal{R}\mathrm{e}(\overline{z_1}z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$. $\overrightarrow{V_1}$ **et** $\overrightarrow{V_2}$ **sont orthogonaux si, et seulement si,** $\mathcal{R}\mathrm{e}(\overline{z_1}z_2) = 0$ soit $\boldsymbol{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0}$.

3. L'expression $\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = \frac{1}{2}[2(x_1x_2 + y_1y_2)] = x_1x_2 + y_1y_2$ **s'appelle le produit scalaire des vecteurs** $\overrightarrow{V_1}$ **et** $\overrightarrow{V_2}$ dont les affixes respectives sont z_1 et z_2.

14 **1.** Soit A un point d'affixe a et $\vec{u}$ un vecteur directeur de cette droite D d'affixe u. M d'affixe z appartient à D si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\vec{u}$ soit $z - a = \lambda u$.
La droite *D* est représentée par l'équation complexe $\boldsymbol{z = a + \lambda u}$, $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$.

2. Soit D une droite passant par deux points A et B d'affixes respectives a et b. Un vecteur directeur de D est alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ d'affixe $b - a$. **La droite *D* est représentée par l'équation complexe** $\boldsymbol{z = a + \lambda(b - a)}$, $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$.

3. Trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c sont alignés si, et seulement si, A = B (1) ou A ≠ B et il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (2).

(1) se traduit par $a = b$

(2) se traduit par : « il existe un réel λ tel que $c - a = \lambda(b - a)$ » avec $b \neq a$

ce qui équivaut à « $b - a \neq 0$ et $\frac{c-a}{b-a}$ est réel »

ce qui équivaut à « $b - a \neq 0$ et $\overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} = \frac{c-a}{b-a}$ »

ce qui équivaut à « $b - a \neq 0$ et $\dfrac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} = \dfrac{c - a}{b - a}$ »

ce qui équivaut à « $b - a \neq 0$ et $(\bar{c} - \bar{a})(b - a) = (c - a)(\bar{b} - \bar{a})$ »

ce qui équivaut à « $b - a \neq 0$ et $b\bar{c} - a\bar{c} - b\bar{a} + a\bar{a} = c\bar{b} - a\bar{b} + a\bar{a} - c\bar{a}$ »

ce qui équivaut à $b \neq a$ et $\boldsymbol{(\bar{a}b - a\bar{b}) + (\bar{b}c - b\bar{c}) + (\bar{c}a - c\bar{a}) = 0}$. (3)

et nous remarquons que si $b = a$ la relation ci-dessous est vérifiée ;
donc cette relation (3) regroupe les situations (1) et (2).
C'est une condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C quelconques, soient alignés.

4. Soit D une droite déterminée par 2 points distincts A et B d'affixes a et b ; D est l'ensemble des points M, d'affixe z, tels que les points A, B, M soient alignés.

Utilisons la condition nécessaire et suffisante (3) avec $c = z$.

Elle se traduit par : $(\bar{a}b - a\bar{b}) + (\bar{b}z - b\bar{z}) + (\bar{z}a - z\bar{a}) = 0$

ce qui équivaut à $\boldsymbol{(\bar{b} - \bar{a})z - (b - a)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b} = 0}$

remarquons que $b - a \neq 0$, $\bar{b} - \bar{a} \neq 0$ et $\bar{a}b - a\bar{b}$ est imaginaire pur

car $\overline{(\bar{a}b - a\bar{b})} = \overline{\bar{a}b} - \overline{a\bar{b}} = a\bar{b} - \bar{a}b = -(\bar{a}b - a\bar{b})$.

On obtient une équation de la forme $\boldsymbol{uz - \bar{u}\,\bar{z} + v = 0}$ **avec** $\boldsymbol{u \in \mathbb{C}^*}$, $\boldsymbol{v}$ **imaginaire pur**.

Réciproquement : étant donnée une équation complexe de la forme (E) :

$uz - \bar{u}\,\bar{z} + v = 0$ avec $\begin{cases} u \in \mathbb{C}^* \\ v \text{ imaginaire pur} \end{cases}$

on peut trouver au moins un point A d'affixe a vérifiant cette équation, puis un point B d'affixe b tel que $b - a = \bar{u}$; alors ce point B vérifie aussi l'équation (E) et cette équation (E) caractérise la droite (AB) et l'on a $v = \bar{a}b - a\bar{b}$.

15 **1.** Remarquons que $\bar{w}z + w\bar{z} = 2\mathcal{R}e(\bar{w}z)$, l'ensemble considéré admet pour équation cartésienne $ux + vy - \dfrac{l}{2} = 0$. Le nombre complexe w étant non nul, il s'agit de **l'équation d'une droite**.

2. L'équation de D peut s'écrire sous la forme $\bar{w}z + w\bar{z} - l = 0$ avec $\boldsymbol{w = a + ib}$ et $\boldsymbol{l = -2c}$.

EXOS Exercices de synthèse

16 **1.** La somme des coefficients respectifs affectés à A, B et C étant non nulle, nous pouvons écrire :

$$(-1+1+1)\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

En appelant g l'affixe du point G, nous avons :

$g = -Z_A + Z_B + Z_C$

$g = -3(1 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(9 + 5i\sqrt{3}) + \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$

$g = \left(-3 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right) + i\left(-3\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$

Soit : $\boldsymbol{g = 3 + i\sqrt{3}}$.

2. La rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ associe, à tout point M d'affixe z, le point M′ d'affixe z', avec $z' - g = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - g)$.

Il s'ensuit : $Z_{A'} = g + e^{i\frac{2\pi}{3}}(Z_A - g)$ avec $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Z_{A'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + 3i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3})$

$Z_{A'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2i\sqrt{3})$

$Z_{A'} = 3 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3$

soit $\boldsymbol{Z_{A'} = 0}$.

$Z_{B'} = g + e^{i\frac{2\pi}{3}}(Z_B - g)$

$Z_{B'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\right)$

$Z_{B'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$Z_{B'} = 3 + i\sqrt{3} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i\sqrt{3} + \frac{3}{4}i\sqrt{3} - \frac{9}{4}$$

soit $\mathbf{Z_{B'} = i\sqrt{3}.}$

$$Z_{C'} = g + e^{i\frac{2\pi}{3}}(Z_C - g)$$

$$Z_{C'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\right)$$

$$Z_{C'} = 3 + i\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z_{C'} = 3 + i\sqrt{3} + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}.$$

soit $\mathbf{Z_{C'} = 3.}$

Nous avons : $A' = O$

B' appartient à $(O\,;\vec{v})$

C' appartient à $(O\,;\vec{u})$.

Le triangle $A'B'C'$ est un triangle rectangle en A'.

Ce triangle $A'B'C'$ étant l'image par une rotation du triangle ABC, on en déduit que ABC est un triangle rectangle en A (conservation des angles.)

17 **1.** Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions cherchées sont : $z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, soit $\mathbf{z_1 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, soit $\mathbf{z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

2. $\dfrac{z_2 + 1}{z_1 + 1} = \dfrac{\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$, soit $\dfrac{z_2 + 1}{z_1 + 1} = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$

$$\frac{z_2 + 1}{z_1 + 1} = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{9 + 3} = \frac{6 + 6\sqrt{3}i}{12} = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.}$$

Nous remarquons que $\dfrac{z_2+1}{z_1+1} = z_2$, avec $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$\dfrac{z_2+1}{z_1+1}$ **a pour module 1 et un argument égal à** $\dfrac{\pi}{3}$.

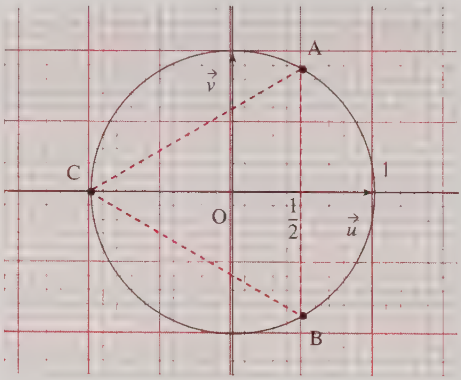
3. Nous avons : $z_2 + 1 = z_2 - (-1) = z_2 - z_C$

et $z_1 + 1 = z_1 - (-1) = z_1 - z_C$.

Soit : $\dfrac{z_2+1}{z_1+1} = \dfrac{z_2 - z_C}{z_1 - z_C}$.

D'après le cours, nous savons qu'un argument de $\dfrac{z_2 - z_C}{z_1 - z_C}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, soit $\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est isocèle en C puisque $C \in (O ; \vec{u})$ et car A et B sont symétriques par rapport à $(O ; \vec{u})$. Comme de plus $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$, nous en concluons que **le triangle ABC est équilatéral.**



18 **1.** Soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' avec x' et y' réels.

$z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ se traduit par : $x' + iy' = \dfrac{1}{x - iy}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$x' + iy' = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$$

$$x' + iy' = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

Il s'ensuit : $\boldsymbol{x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}}$ et $\boldsymbol{y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2}}$.

$z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En utilisant (1) avec $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$, nous avons :

$$z'_B = x' + \mathrm{i}y', \text{ avec } x' = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ et } y' = \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

C'est-à-dire $x' = -1$ et $y' = 1$ et $\boldsymbol{z'_B = -1 + \mathrm{i}}$.

$z_D = -2 - \mathrm{i}$. En utilisant (1) avec $x = -2$ et $y = -1$, nous avons :

$$z'_D = x' + \mathrm{i}y' \text{ avec } x' = \frac{-2}{(-2)^2 + (-1)^2} \text{ et } y' = \frac{-1}{(-2)^2 + (-1)^2}.$$

C'est-à-dire $x' = -\dfrac{2}{5}$ et $y' = -\dfrac{1}{5}$ et $\boldsymbol{z'_D = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}}$.

2. $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $\overrightarrow{OB'}$ a pour affixe $z_{B'} = -1 + \mathrm{i}$.

Remarquons que $z_{B'} = 2z_B$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}}$ et, par conséquent, **les points O, B et B′ sont alignés.**

$\overrightarrow{OD}$ a pour affixe $z_D = -2 - \mathrm{i}$; $\overrightarrow{OD'}$ a pour affixe $z_{D'} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

Remarquons que : $z_{D'} = \dfrac{1}{5}z_D$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\overrightarrow{OD'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{OD}}$ et par conséquent **les points O, D et D′ sont alignés.**

3. Pour montrer que A, B′, C et D′ sont situés sur un cercle de centre B, il suffit de prouver que $BA = BB' = BC = BD'$.

$BA = |z_B - z_A|$, soit $\quad BA = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} - \mathrm{i}\right|$

$$BA = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right|, \quad \text{d'où } BA = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$BB' = |z_B - z_{B'}|$, soit $\quad BB' = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}\right|$

$$BB' = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right|, \quad \text{d'où } BB' = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$BC = |z_B - z_C|$, soit $\quad BC = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1\right|$

$$BC = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|, \quad \text{d'où } BC = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$BD' = |z_B - z_{D'}|$, soit $\quad BD' = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right| = \left|-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i\right|$,

d'où $\quad BD' = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Il s'ensuit que les points A, B′, C et D′ sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19 **1.** $\begin{cases} Z = \dfrac{z+1}{z-2i} \in \mathbb{R} \\ z \neq 2i \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \overline{Z} = Z \\ z \neq 2i \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{z+1}{z-2i} = \overline{\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)} \\ z \neq 2i \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dfrac{z+1}{z-2i} = \dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}+2i} \\ z \neq 2i \end{cases}$ (car $2i = (\overline{-2i})$ et $\bar{1} = 1$)

$\begin{cases} (z+1)(\bar{z}+2i) = (z-2i)(\bar{z}+1) \\ z \neq 2i \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2i(z+\bar{z}) + \bar{z} - z + 4i = 0 \\ z \neq 2i. \end{cases}$ (*)

Soit $z = x + yi$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0\,;\,2)\}$, alors :
$z + \bar{z} = 2x$ et $\bar{z} - z = -2iy$.

(*) équivaut à $\begin{cases} 4ix - 2iy + 4i = 0 \\ (x\,;\,y) \neq (0\,;\,2) \end{cases}$ équivalent à

$\begin{cases} 2i(2x - y + 2) = 0 \\ (x\,;\,y) \neq (0\,;\,2) \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ (x\,;\,y) \neq (0\,;\,2). \end{cases}$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$ est la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ privée du point $B(0\,;\,2)$. Cette droite n'est autre que la droite (AB) passant par le point A d'affixe $a = -1$ et le point B d'affixe $b = 2i$.

On a : $\boldsymbol{Z = \dfrac{z-a}{z-b}}$ **et** $\boldsymbol{Z \in \mathbb{R}}$ **équivaut à** $\boldsymbol{M(z) \in (AB) - \{B\}}$.

2. $\begin{cases} Z = \dfrac{z+1}{z-2\text{i}} & Z \text{ imaginaire pur} \\ z \neq 2\text{i} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \overline{Z} = -Z \\ z \neq 2\text{i} \end{cases}$

soit $\begin{cases} z \neq 2\text{i} \\ \dfrac{\overline{z+1}}{\overline{z-2\text{i}}} = -\dfrac{z+1}{z-2\text{i}} \end{cases}$ soit $\begin{cases} (\overline{z}+2\text{i})(z+1) = -(\overline{z}+1)(z-2\text{i}) \\ z \neq 2\text{i} \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2z\overline{z} + z + \overline{z} + 2\text{i}(z - \overline{z}) = 0 \\ z \neq 2\text{i} \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2(x^2+y^2)+2x+2\text{i}(2\text{i}y)=0 \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 2) \end{cases}$ car $z-\overline{z} = 2\text{i}y$

$\begin{cases} y^2 + x^2 + x - 2y = 0 \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 2) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 2). \end{cases}$

L'ensemble des points $\boldsymbol{M(z)}$ **tels que Z est imaginaire pur est donc le cercle de centre** $\boldsymbol{I\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)}$ **et de rayon** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$**, privé du point** $\boldsymbol{B(0\ ;\ 2)}$**.**

Ce cercle passe par O et par $A(-1\ ;\ 0)$ et $[AB]$ a pour milieu I, c'est donc le cercle de diamètre $[AB]$, privé de B.

3. $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ équivaut à $Z = -\overline{Z}$ et $\operatorname{Im} Z > 0$

ce qui équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \end{cases}$ et $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 2)$.

Ce qui équivaut à « $M(x\ ;\ y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et au demi-plan contenant O défini par la droite (AB), les points de (AB) étant exclus du fait de l'inégalité stricte ».

L'ensemble des points M est le demi-cercle passant par O de diamètre $\boldsymbol{[AB]}$**, A et B exclus.**

BAC *L'épreuve*

20 **1. a.** $Z^4 - 1 = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1)$

$$Z^4 - 1 = (Z - 1)(Z + 1)(Z - \mathrm{i})(Z + \mathrm{i})$$

b. $\mathcal{P}(Z) = 0$ équivaut à $Z = 1$ ou $Z = -1$ ou $Z = \mathrm{i}$ ou $Z = -\mathrm{i}$.

Donc $\boldsymbol{S = \{-1\,;1\,;\mathrm{i}\,;\,-\mathrm{i}\}}$.

c. D'après la question précédente, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ Z = \dfrac{2z+1}{z-1} \\ Z^4 - 1 = 0 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} z \neq 1 \\ Z = \dfrac{2z+1}{z-1} \\ Z \in \{-1\,;1\,;\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}. \end{cases}$$

Pour $Z = -1$, on obtient $\begin{cases} z \neq 1 \\ -1 = \dfrac{2z+1}{z-1} \end{cases}$ équivalent à :

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ -z + 1 = 2z + 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z \neq 1 \\ 0 = z. \end{cases}$$

Pour $Z = 1$, on obtient $\begin{cases} z \neq 1 \\ 1 = \dfrac{2z+1}{z-1} \end{cases}$ équivalent à :

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ z - 1 = 2z + 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z \neq 1 \\ -2 = z. \end{cases}$$

Pour $Z = \mathrm{i}$, on obtient $\begin{cases} z \neq 1 \\ \mathrm{i} = \dfrac{2z+1}{z-1} \end{cases}$ équivalent à :

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ \mathrm{i}(z-1) = 2z + 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z \neq 1 \\ (\mathrm{i}-2)z = 1 + \mathrm{i} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z \neq 1 \\ z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{5} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}. \end{cases}$

Pour $Z = -\mathrm{i}$, on obtient $\begin{cases} z \neq 1 \\ -\mathrm{i} = \dfrac{2z+1}{z-1} \end{cases}$ équivalent à :

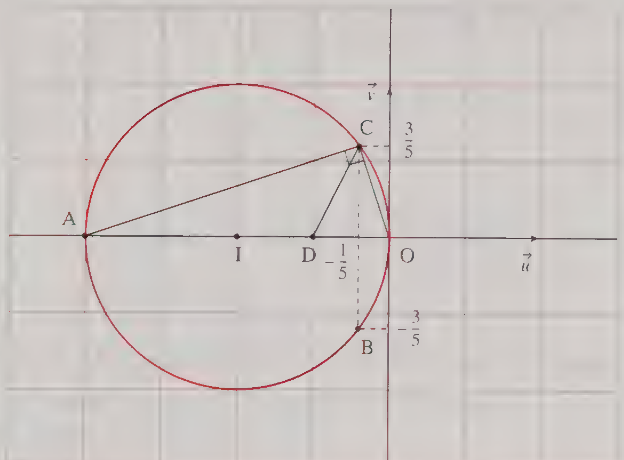
$\begin{cases} z \neq 1 \\ -\mathrm{i}(z-1) = 2z+1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z \neq 1 \\ (-\mathrm{i}-2)z = 1-\mathrm{i} \end{cases}$ soit $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}} \end{cases}$

soit $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})}{5} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} z \neq 1 \\ z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}. \end{cases}$

Les solutions de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 0$ sont :

$$\mathbf{0\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\ ;\ -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

2. a. Représentation graphique



b. Le cercle passant par O, A, B et C, s'il existe, a son centre situé à l'intersection des médiatrices de [OA] et [BC], c'est-à-dire le point d'affixe –1.
Nous avons :

$$IO = 1\ ;\ IA = 1 \text{ et } IB = IC = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-0\right)^2} = 1.$$

Les quatre points O, A, B et C sont donc situés sur le cercle de centre I d'affixe –1 et de rayon 1.

3. Voir figure page précédente.

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-2-\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)}{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)} \quad \text{soit} \quad \frac{a-c}{d-c} = \frac{-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}}{-\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\mathrm{i}}$$

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{6+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$$

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{(6+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}$$

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{10-10\mathrm{i}}{5}$$

$$\boldsymbol{\frac{a-c}{d-c} = 2-2\mathrm{i}.}$$

Or $2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

donc $z' = 2\sqrt{2}\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$

Ou encore : $z' = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$

Nous avons : $\frac{CA}{CD} = \left|\frac{a-c}{d-c}\right| = 2\sqrt{2}$ soit $\boldsymbol{\frac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}.}$

Nous avons aussi $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ puisqu'un argument de z' est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$. Comme le triangle OCA est rectangle en C, nous en déduisons que **la droite (CD) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})$.**

21 **1.** A_0 et A_1 sont les points d'affixes respectives $a_0 = 1$ et $a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

a. Soit a_2 l'affixe du point A_2 image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

À tout point M d'affixe z, r associe le point M′ d'affixe z' défini par $z' = e^{i\frac{\pi}{12}}z$.

D'où $\boldsymbol{a_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{2\pi}{12}} = \boldsymbol{e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

L'expression algébrique de a_2 est :

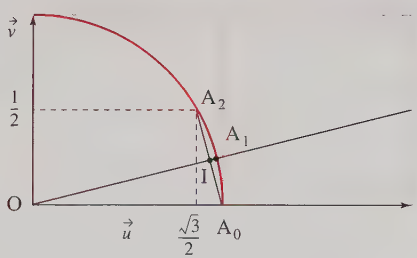
$$\boldsymbol{a_2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.}$$

b. Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$ d'affixe z_1.

Nous avons : $$z_1 = \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{2}$$

soit $$\boldsymbol{z_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.}$$

c. Figure



2. a. $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA_1}$ admettent pour affixes respectives $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}$ et $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Or $$\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}}\right)}{2} = \cos\frac{\pi}{12} \times e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{OI} = \left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\overrightarrow{OA_1}$.

Ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA_1}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que **les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.**

b. Nous avons montré à la question précédente que $\overrightarrow{OI}$ admet pour affixe $\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\times e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Il s'ensuit que I admet pour affixe $\boldsymbol{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\times e^{i\frac{\pi}{12}}}$.

c. On déduit des résultats précédents que :

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\times e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

soit $\begin{cases}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\end{cases}$ ou $\begin{cases}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}\\ \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}.\end{cases}$

Puisque l'on a $\cos\frac{\pi}{12}>0$ $\left(\frac{\pi}{12}\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{12}\right]\right)$, on en déduit que :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

De là, on tire : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

2 Fonctions numériques

1 Éléments de symétrie

1 Définition

Une fonction numérique de A vers B ($A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$) est définie par la donnée de :
- A : ensemble de départ ;
- B : ensemble d'arrivée ;
- et d'une *correspondance* permettant d'associer à tout élément x de A un élément y de B au plus.

2 Image

Si $b \in B$ est tel que $f(a) = b$ pour $a \in A$, on dit que b est l'*image* de a par f.
On dit aussi que a est un *antécédent* de b par f.
L'ensemble de définition de f est l'ensemble des éléments x de A qui ont une image par f.

3 Fonctions paires et fonctions impaires

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.
On dit que la fonction f est :
- **paire** lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$;
- **impaire** lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

4 Centre de symétrie. Axe de symétrie

Soit f une fonction numérique de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- f est **paire** si et seulement si $(O ; \vec{j})$ est un **axe de symétrie** pour $(\mathscr{C}_f)$.
- f est **impaire** si et seulement si O est un **centre de symétrie** pour $(\mathscr{C}_f)$.
- Le point $I(a ; b)$ est *centre de symétrie* pour $(\mathscr{C}_f)$ si, et seulement si : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.
La droite d'équation $x = a$ est un *axe de symétrie* pour $(\mathscr{C}_f)$ si, et seulement si : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a-x) - f(x) = 0$.

5 Intersections

- Les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions numériques f et g ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $y = m$.

2 Limites

1 Limite nulle

Une fonction numérique *majorée* en valeur absolue par une fonction admettant pour *limite* 0 lorsque $x \to x_0$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ a elle-même une limite égale à 0.

Si $|f(x)| \leqslant u(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

2 Limite à l'infini. Limites infinies

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*,\ n \text{ pair})$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*,\ n \text{ impair})$.

■ f et g désignent deux fonctions dérivables sur $[a\ ;+\infty[$.

Si $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout $x \geqslant a$, $a \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

f et g désignent deux fonctions dérivables sur $[-\infty\ ; b[$.

Si $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \leqslant b$, $b \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

■ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0\ ;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*\ ;\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n$ pair ; $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n$ impair.

■ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

■ La limite à l'infini d'une fonction polynôme est la même que celle de son monôme de plus haut degré.
La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

■ **Asymptotes :**

● Si $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

● Si $f(x)$ s'écrit $a + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

La droite d'équation $y = a$ est alors une asymptote à la courbe représentative de f.

● Si $f(x)$ s'écrit $ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

3 Limite de fonctions composées

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \to \ell} f(x) = \ell'$, alors $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \ell'$.

3 Continuité

■ Une fonction est continue sur un intervalle lorsque sa courbe se trace d'un « trait continu » sur cet intervalle.

■ Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a, b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaire : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a ; b]$.

■ Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

4 Dérivation

1 Dérivabilité

■ Soit une fonction numérique f et un réel x_0 appartenant à un intervalle ouvert I inclus dans $\mathscr{D}_f$.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel a et une fonction φ tels que pour h voisin de zéro :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0,$$

a est appelé nombre dérivé de f en x_0 et noté $f'(x_0)$.

■ Pour qu'une fonction numérique f soit dérivable en x_0 il faut et il suffit que le rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ait une limite finie quand h tend vers 0.

❷ Tangente

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction numérique f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit $M_0(x_0 ; f(x_0))$ un point de $(\mathscr{C}_f)$.
Si f est dérivable en x_0, alors l'équation de la tangente en M_0 à $(\mathscr{C}_f)$ est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

❸ Fonction dérivée

■ Si une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I.

■ L'application, qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x, s'appelle fonction dérivée de f notée f'.

❹ Formules à connaître

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivation
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

Résultats importants
u, v, f désignent des fonctions dérivables sur I :
$(uv)' = u'v + uv'$
$(\lambda u)' = \lambda u', \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad u > 0$
$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}, \quad u > 0$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$
Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = af'(ax + b)$

5 Sens de variation. Points remarquables

1 Sens de variation et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de I.
- f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x de I.

2 Extremum

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 appartenant à I. Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si f admet un extremum local en un point x_0 de I alors $f'(x_0) = 0$.

6 Composée de deux fonctions numériques

- a, b, c désignent des réels ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit f et g deux fonctions :

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x) \overset{g}{\longmapsto} z = g(y) = g(f(x)).$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to b} g(y) = c$.

- Si f est dérivable en $ax_0 + b$, alors la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable en x_0 et admet $af'(ax_0 + b)$ pour nombre dérivé en x_0.

MÉTHODES

1 Comment calculer :

■ le nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0 ?

a. Si f est dérivable en x_0, alors ce nombre dérivé est $f'(x_0)$.

b. En calculant $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

2 Comment déterminer une équation :

■ d'une tangente en un point M_0 d'abscisse x_0 de la courbe représentative de la fonction f ?

a. En montrant que f est dérivable en x_0 et en appliquant le résultat $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

b. En sachant que cette tangente est parallèle à l'axe des ordonnées lorsque f n'est pas dérivable en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$. L'équation est alors $x = x_0$.

3 Comment déterminer une équation :

■ d'une asymptote à la courbe représentative de f ?

a. Lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$) alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini.

c. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini.

4 Comment montrer :

■ que f réalise une bijection de I sur J (I et J intervalles de $\mathbb{R}$) ?

a. En montrant que tout élément de J admet un unique antécédent dans I : pour tout $\alpha \in$ J, l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique dans I.

b. En montrant que f est continue sur I et strictement monotone sur I avec $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$.

5 Comment démontrer :

■ **une inégalité du type $\mathbf{A}(x) \leqslant \mathbf{B}(x)$?**

a. En montrant que $\mathrm{A}(x) - \mathrm{B}(x) \leqslant 0$ pour tout x appartenant à un intervalle donné.

b. À l'aide de la monotonie de la fonction h :

$h(\mathrm{A}(x)) \leqslant h(\mathrm{B}(x))$ équivaut à $\mathrm{A}(x) \leqslant \mathrm{B}(x)$ pour h croissante sur un intervalle choisi.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Les affirmations ou résultats suivants sont-ils vrais ? Justifier la réponse avec précision.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (4\sqrt{x} - 2x + 5) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x-1}{x+3} = 4$.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{4x-1}{x+3} = +\infty$.

4. La fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $E_f = [2\,;+\infty[$.

5. La fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+5}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0\,;2[$.

6. La fonction numérique f définie par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, car $f(x) > x^2$ pour tout $x > 0$.

7. La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote au voisinage de l'infini à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

8. La différence de deux fonctions non dérivables en 0 est non dérivable en 0.

9. Soit a, b, c trois réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la courbe représentative est une parabole $(\mathcal{P})$.
On suppose que $(\mathcal{P})$ passe par le point A de coordonnées $(1\,;-1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1. Alors :

a. $f'(-1) = -1$, car la dérivée représente le coefficient directeur de la tangente en A ;

b. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est une solution ;

c. $\begin{cases} a - b + c = -1 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$;

d. il existe une unique fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé.

▶ **10.** Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Alors :

a. $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$; **b.** $f'(x) = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{2}$;

c. $f'(x) = 2(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$.

▶ **11.** Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$. Alors :

a. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; **b.** $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

c. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **d.** $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

e. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

▶ **12.** Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \tan(1 + x^2)$. Alors :

a. $f'(x) = 2x(1 + \tan^2 x)$; **b.** $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$;

c. $f'(x) = x[1 + \tan^2(1 + x^2)]$.

▶ **13.** Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ pour $x \neq -1$. Alors :

a. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$; **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **c.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

▶ **14.** **a.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x^2 + 3x^5} = \dfrac{1}{3}$; **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} = 1$;

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{2 + x^2} - x + 1] = -\infty$; **d.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \dfrac{1}{4}$.

▶ **15.** Soit $f(x) = \dfrac{-x\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}$. Alors :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$; **b.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$; **c.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

▶ **16.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \cdots$

a. 0 ; **b.** $\dfrac{1}{2}$; **c.** 1 ; **d.** $+\infty$; **e.** n'existe pas.

▶ **17.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x - 2} = \cdots$

a. -1 ; **b.** 0 ; **c.** 1 ; **d.** $+\infty$; **e.** n'existe pas.

▶ **18.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) = \cdots$

a. $\sin^2(1)$; **b.** 1 ; **c.** 0 ; **d.** $+\infty$;
e. aucune des solutions précédentes.

▶ **19.** $\cos^4 x$ est égal à :

a. $\dfrac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}$; **b.** $\dfrac{\cos 4x - 4\cos 2x + 6}{16}$;

c. $\dfrac{\sin 4x + 4\cos 2x + 6}{8}$; **d.** $\dfrac{\sin 4x + 4\sin 2x + 3}{16}$.

▶ **20.** $\cos^2 x$ est égal à :

a. $\dfrac{1 + \cos 2x}{2}$; **b.** $\dfrac{-1 + \cos 2x}{2}$; **c.** $\dfrac{1 + 2\cos 2x}{4}$; **d.** $\dfrac{1 - \sin 2x}{2}$.

▶ **21.** **a.** Pour tout $x \in [-1\ ;+\infty[$, $\sqrt{x^2(x+1)^3} = x(x+1)\sqrt{x+1}$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{2 + x^2} = x\sqrt{\dfrac{2}{x^2} + 1}$.

c. Pour tout $x \in\ ]1\ ;+\infty[$, $\dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$.

2 Réponses

▶ **1.** Pour tout $x > 0$, $4\sqrt{x} - 2x + 5 = x\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2 + \dfrac{5}{x}\right)$.

Nous avons : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2 + \dfrac{5}{x}\right) = -2$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty}(4\sqrt{x} - 2x + 5) = -\infty$.

La réponse fournie est correcte.

▶ **2.** Pour tout $x < 0$, $\dfrac{4x - 1}{x + 3} = \dfrac{4 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 1}{x + 3} = 4$.

La réponse donnée est correcte.

▶ **3.** Nous avons : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x+3) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (4x-1) = -13.$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{4x-1}{x+3} = +\infty.$ Le résultat proposé est vrai.

▶ **4.** f est la composée de $x \mapsto x-2$ par $X \mapsto \sqrt{X}$.

La fonction f n'est pas dérivable en 2 puisque la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ n'est pas dérivable en 0.

▶ **5.** Pour tout α de $[0\,;2[$, l'équation $f(x) = \alpha$ est équivalente à :

$$\frac{2x^2}{x^2+5} = \alpha \text{ ou encore } (2-\alpha)x^2 = 5\alpha$$

$$x^2 = \frac{5\alpha}{2-\alpha} \text{ car } \alpha \neq 2$$

$$x = \sqrt{\frac{5\alpha}{2-\alpha}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5\alpha}{2-\alpha}}.$$

L'équation $f(x) = \alpha$, avec $0 < \alpha < 2$, admet deux solutions, donc f ne réalise pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0\,;2[$.

■ **Autre méthode :**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2+5)^2}$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Ceci permet de conclure que f ne réalise pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0\,;2[$.

▶ **6.** La réponse est correcte puisque $f(x) > x^2$, pour tout $x > 0$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$

▶ **7.** Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - (2x+3) = \dfrac{1}{x^2}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0.$

La droite d'équation $y = 2x+3$ est donc asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini.

▶ **8.** La phrase est fausse car :

$f : x \mapsto 2\sqrt{x} + x$ n'est pas dérivable en 0

$g : x \mapsto x^2 + 3x + 2\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

et pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = -x^2 - 2x$ donc h est dérivable en 0

(fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$).

▶ **9.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai ; **d.** Faux.

▶ **10.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux.

▶ **11.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **12.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **13.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **14.** **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Vrai.

▶ **15.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **16.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **17.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **18.** **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Vrai ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **19.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux.

▶ **20.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux.

▶ **21.** **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Vrai.

Pour les exercices 1 à 3, indiquer si les propositions sont vraies ou fausses et justifier.

▶ 1. Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \sin(\pi x)$. Alors :

a. la fonction f est périodique de période 2 ;
b. la fonction f est impaire ;
c. pour tout réel x, on a $f(x+2) = f(x) + 1$;
d. la dérivée f' de f est périodique de période 2.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. Pour tout x réel, $f(x+2) = \frac{x+2}{2} + \sin[\pi(x+2)]$

$$f(x+2) = \frac{x}{2} + 1 + \sin(\pi x + 2\pi)$$

$$f(x+2) = \frac{x}{2} + 1 + \sin(\pi x)$$

$f(x+2) = f(x) + 1$, donc f n'est pas périodique de période 2.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{-x}{2} + \sin(-\pi x)$

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin(\pi x), \text{ soit } f(-x) = -f(x),$$

donc f est impaire.

c. D'après le calcul effectué en **a**, on a, pour tout réel x, $f(x+2) = f(x) + 1$.

d. En dérivant la relation $f(x+2) = f(x) + 1$,
on obtient $f'(x+2) = f'(x)$.
f' est bien une fonction périodique de période 2.

▶ 2. Soit f une fonction numérique de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+2}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$ ↗		-2	↘ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	

Alors :

a. pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$;

b. $c = 5$;

c. la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f lorsque x tend vers $+\infty$;

d. la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f lorsque x tend vers $-\infty$;

e. la droite représentative de f est au-dessous de son asymptote lorsque $x < -2$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. Réponse correcte.

b. À l'aide de **a** nous déduisons : $a = 1$ et $2b - c = 3$.
Or $f(-1) = 2$, donc $c - b = 1$, d'où $b = 4$ et $c = 5$.
La réponse est donc correcte.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x+2} = \dfrac{(x+2)^2 + 1}{x+2}$

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+2}.$$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$; donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
La réponse proposée est fausse.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

e. De plus $f(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x+2}$.

Lorsque $x < -2$, $\dfrac{1}{x+2} < 0$ et $f(x) - (x+2) < 0$, donc la courbe de f est bien en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

▶ **3.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x - \sin x$.
Alors :

a. pour construire la courbe représentative de f, il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$;

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -4\cos x \sin^2 x$;

(on donne $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$) ;

c. f est décroissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

d. f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$;

e. pour tout k de $\mathbb{N}$, $f\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. $x \mapsto \sin 3x$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$; $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π, de plus f est impaire, donc l'étude de cette fonction peut s'effectuer sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ puisque sa période est 2π et qu'elle est impaire.

b. f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos 3x - \cos x$, or (d'après la formule fournie) :

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$, d'où $f'(x) = -2\sin 2x \sin x$,

soit $f'(x) = -4\sin x \cos x \sin x$ puisque $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
Finalement : $f'(x) = -4\sin^2 x \cos x$.

c. Pour tout $x \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$ avec $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin 0 = 0$; donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(0) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

f est donc décroissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

d. Sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$, $\sin^2 x > 0$ et $\cos x > 0$, donc $f'(x) < 0$ avec $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(0) = 0$. Donc f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$.

e. f est une fonction impaire, donc pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ et $\frac{\pi}{2} - k\pi = -\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$, donc la réponse fournie est fausse.

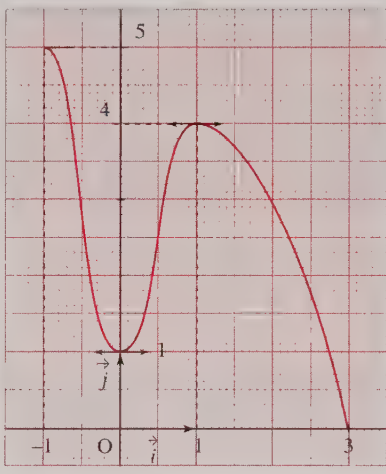
► **4.** On sait qu'une certaine fonction f vérifie les propriétés suivantes :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$;
- f est positive sur $[-1\ ;\ 3]$;
- $f(-1) = 5$; $f(0) = 1$; $f(1) = 4$ et $f(3) = 0$;
- f' s'annule en -1, 0 et 1 ;
- f' est strictement négative sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

■ **Solution :**

Les données se traduisent par :

x	-1		0		1		3
Signe de $f'(x)$	0	–	0		0		
Variations de f	5	↘	1	↗	4	↘	0



EXOS Exercices d'application

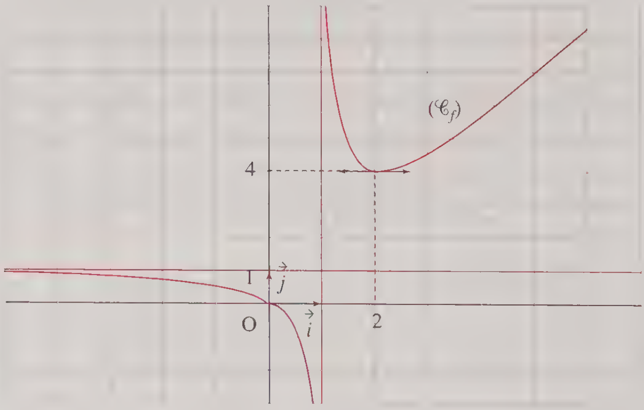
1 Déterminer les limites suivantes.

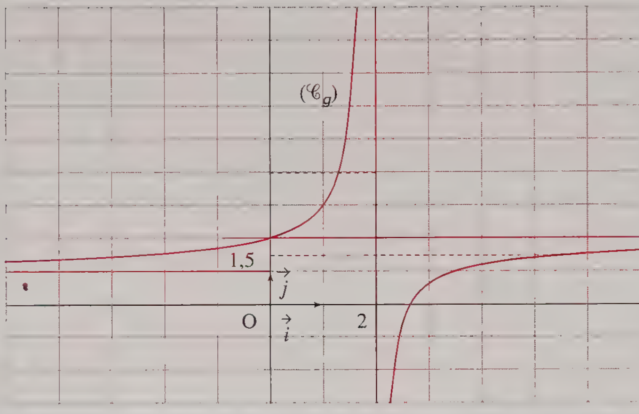
a. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 7x + 1}{(x-2)(x+1)}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 7x + 1}{(x-2)(x+1)}$.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 7x + 1}{(x-2)(x+1)}$.

2 f et g sont deux fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-après dans des repères orthogonaux du plan.

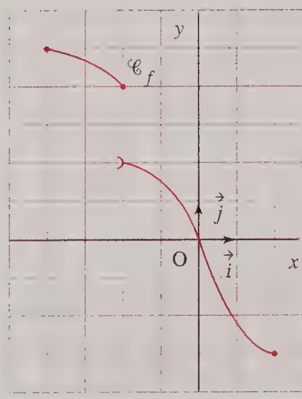


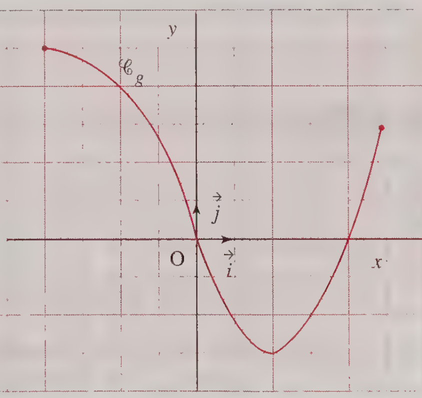


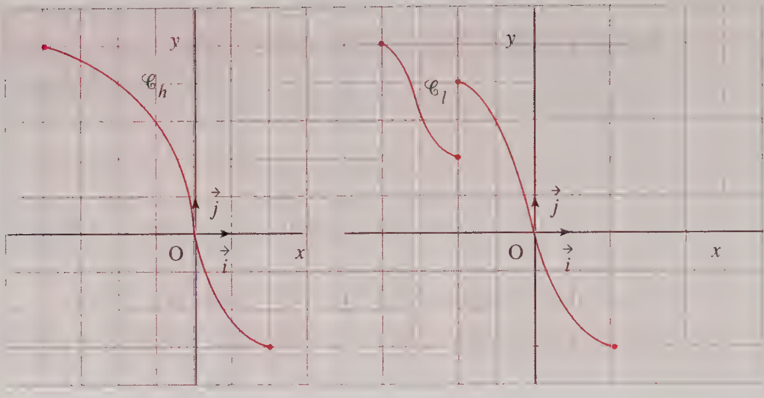
Avec les informations données par les graphiques, calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ g(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ g(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f \circ g(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f \circ g(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f \circ g(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g \circ f(x) = \cdots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f \circ g(x) = \cdots$

3 Les fonctions f, g, h et l sont représentées sur les graphiques suivants :







1. a. Vérifier que l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions est un intervalle que l'on donnera.

b. Quelles sont les fonctions monotones ?

2. Préciser celles qui sont continues sur leur ensemble de définition.

4 Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto E(x)$, fonction partie entière de x, sur l'intervalle $[-2 ; 3[$ et en déduire les points où elle n'est pas continue.

5 Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = x^7 + 3x^5 - x + 2$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

b. Que peut-on en conclure quant à la résolution de l'équation $f(x) = m$ où m désigne un réel ?

c. Que peut-on dire de l'image par f de l'intervalle $[0 ; 1]$?

EXOS Exercice de synthèse

6 **1.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

a. Factoriser $f(x)$.

b. Pour quelle valeur de x, f admet-elle un minimum ? Quel est-il ?

c. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

2. On pose $h(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x - 2}$ avec $x \in [0\,;2[$.

a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} h(x)$.

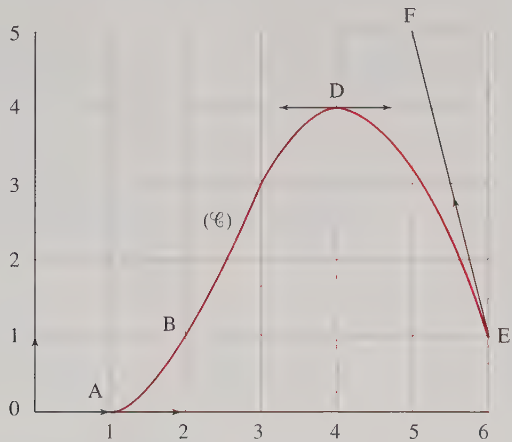
b. Étudier les variations de h sur l'intervalle $I = [0\,;2[$.

c. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de la fonction h dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

BAC L'épreuve

7 On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$.

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points $A(1\,;0)$, $B(2\,;1)$, $D(4\,;4)$ et $E(6\,;1)$.

Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.

La tangente à la courbe au point E passe par le point $F(5\,,5)$.

Partie A

Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$.

Partie B

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;6]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.

b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.

Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

c. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle $]1\,;6]$ en donnant les justifications nécessaires.

d. Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.

2. Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et la tangente au point d'abscisse 4.

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** $\lim\limits_{x \to -1} (x-2)(x+1) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2+7x+1) = -3$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x-2)(x+1) = 0^-$, car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x-2) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{(x-2)(x+1)}{3x^2+7x+1} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x-2) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{(x-2)(x+1)}{3x^2+7x+1} = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = -\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)}$ **n'existe pas, car :**

$$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)}.$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+7x+1}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$.

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = 3.$$

c. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+7x+1}{(x-2)(x+1)} = 3.$$

2

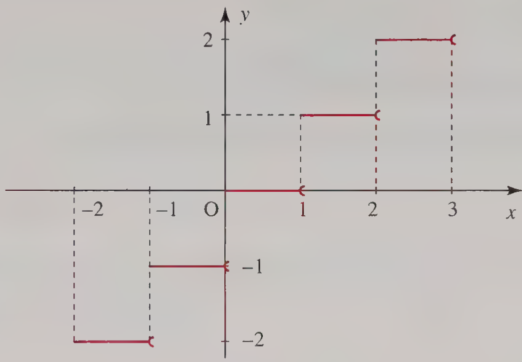
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)(x) = 2$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{y \to 2} f(y) = 4$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = 4$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{y \to 1} g(y) = 3$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x) = 3$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1^+$ et $\lim\limits_{y \to 1^+} f(y) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ g)(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = 1$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (g \circ f)(x) = 1$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{y \to 3} f(y) = f(3) = \frac{9}{2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (f \circ g)(x) = \frac{9}{2}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 2$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (g \circ f)(x) = 2$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{y \to 3} f(y) = f(3) = \frac{9}{2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (g \circ f)(x) = \frac{9}{2}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{y \to 4} g(y) = g(4) = \frac{3}{2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (g \circ f)(x) = \frac{3}{2}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (f \circ g)(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{y \to 4} g(y) = g(4) = \frac{3}{2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (g \circ f)(x) = \frac{3}{2}$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = 1$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (f \circ g)(x) = 1$.

3 **1. a.** Nous avons : $\mathcal{D}_f = [-4\,;\,2]$, $\mathcal{D}_g = [-4\,;\,5]$, $\mathcal{D}_h = [-4\,;\,2]$ et $\mathcal{D}_l = [-4\,;\,2]$.

b. Les fonctions monotones sont f et h.

2. Les fonctions continues sur leur ensemble de définition sont g et h car les tracés des autres fonctions représentées ne peuvent s'effectuer d'un trait continu.

4 Représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-2\,;3[$.



Par lecture graphique, nous pouvons dire que sur l'intervalle $[-2\,;3[$, la fonction partie entière n'est pas continue pour les valeurs entières de x $(-1\,;0\,;1\,;2)$.

5 **a.** f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et, par conséquent, sur l'intervalle $[0\,;1]$ avec $f(0)=2$ et $f(1)=5$. Or, 3 appartient à l'intervalle $[2\,;5]$ donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ admet bien au moins une solution x_0 dans l'intervalle $[0\,;1]$.

b. Pour tout m appartenant à l'intervalle $[2\,;5]$, il existe x_0 dans $[0\,;1]$ tel que $f(x)=m$ pour les mêmes raisons que précédemment.

c. L'image de l'intervalle $[0\,;1]$ est un intervalle $[u\,;v]$ mais, comme $f(0)=2$ et $f(1)=5$, nous pouvons préciser que $[2\,;5]\subset[u\,;v]$ d'où $u\leqslant 2$ et $v\geqslant 5$.

EXOS Exercice de synthèse

6 **1.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=3x^2-5x-2.$$

a. Les solutions de l'équation $3x^2-5x-2=0$ sont 2 et $-\dfrac{1}{3}$.

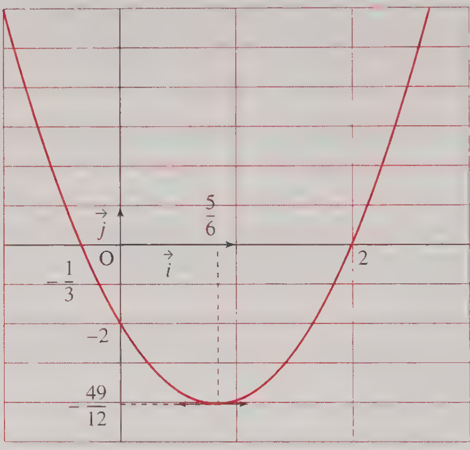
Il s'ensuit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $3x^2-5x-2=3(x-2)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

D'où $\boldsymbol{f(x)=(x-2)(3x+1)}$.

b. f est une fonction du second degré dont la courbe représentative est une parabole de sommet $S\left(\frac{5}{6} ; -\frac{49}{12}\right)$.

f admet un minimum égal à $-\frac{49}{12}$ en $\frac{5}{6}$.

c. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



2. Soit $h : [0 ; 2[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = \frac{1}{3x^2 - 5x - 2}.$$

a. On a $h(2+a) = \dfrac{1}{(3(2+a)+1)(2+a-2)}$ pour $a < 0$, en utilisant la factorisation établie en **1. a,** puisque $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in [0 ; 2[$.

Donc $h(2+a) = \dfrac{1}{7+a} \times \dfrac{1}{a}$ pour $a < 0$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{a} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a < 0}} \dfrac{1}{7+a} = \dfrac{1}{7}$, donc $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a < 0}} h(2+a) = -\infty$.

Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} h(x) = -\infty}$.

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C}')$.

b. Pour tout $x \in [0\,;2[$, on a $h'(x) = -\dfrac{6x-5}{(3x^2-5x-2)^2}$

$$h'(x) = \frac{5-6x}{(3x^2-5x-2)^2}$$

avec $(3x^2-5x-2)^2 > 0$ pour tout $x \in [0\,;2[$ et $5-6x > 0$ pour tout $x \in \left[0\,;\frac{5}{6}\right[$. Il s'ensuit que $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \left[0\,;\frac{5}{6}\right[$ et $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]\frac{5}{6}\,;2\right[$.

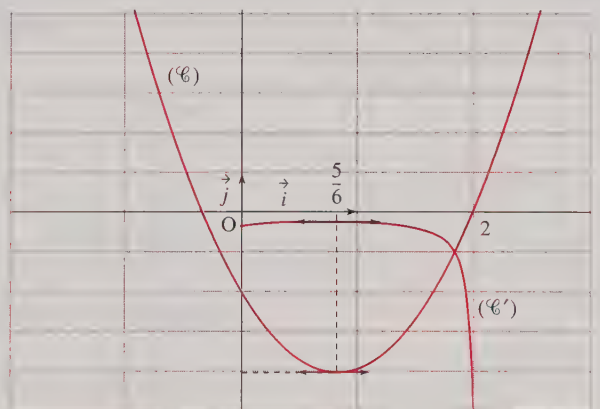
h est croissante sur $\left[0\,;\frac{5}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{5}{6}\,;2\right[$.

D'où le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{5}{6}$		2
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{12}{49}$	↘	$-\infty$

(On retrouve la propriété sur le sens de variations d'une fonction composée : si u, fonction ne s'annulant pas sur un intervalle I, est croissante sur ce même intervalle, alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.)

c. Les courbes représentatives $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont données ci-dessous :



BAC *L'épreuve*

7 ■ **Partie A**

Par lecture graphique nous obtenons immédiatement :

l'équation $f(x) = 0$ admet pour seule solution $x = 1$.

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f étant située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]1\,;6]$ avec $f(1) = 0$, nous en déduisons que :

pour tout x de $[1\,;6]$, $f(x) \geqslant 0$.

■ **Partie B**

1. a. $g(2) = \dfrac{1}{f(2)} = \mathbf{1}$

$g(4) = \dfrac{1}{f(4)} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

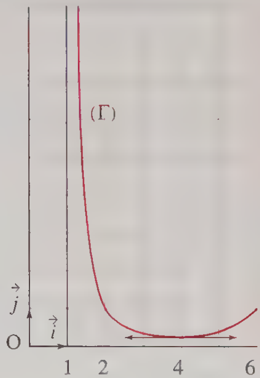
$g(6) = \dfrac{1}{f(6)} = \mathbf{1}$

b. Nous avons : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = +\infty$. Il s'ensuit que :

la courbe (Γ) représentative de g admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

2. Courbe représentative de g :



c. La fonction f est croissante et positive sur l'intervalle $]1\,;4]$ donc g est décroissante sur cet intervalle. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[4\,;6]$ donc la fonction g est croissante et positive sur cet intervalle.

Tableau de variations de g sur $]1\,;6]$:

x	1	4	6
Variations de g	1 ↘	$\frac{1}{4}$	↗ 1

d. Nous avons $f'(4) = 0$ puisque f est dérivable croissante sur $]1\,;4]$, décroissante sur $[4\,;6]$. Or, pour tout x de $]1\,;6]$,

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \quad \text{donc} \quad \mathbf{g'(4) = 0}$$

3 Logarithmes
Exponentielles. Puissances
Équations différentielles

1 Fonctions logarithmes

1 Fonction logarithme népérien

■ On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule pour $x = 1$.

$$\begin{array}{llll} \ln : & \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} & \text{avec} & (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \\ & x \mapsto \ln x & \text{et} & \ln 1 = 0\ ;\ \ln e = 1. \end{array}$$

■ Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln x$.

2 Propriétés

■ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$

■ $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ pour $b > 0$

■ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$

■ $\ln(a^n) = n \ln a$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

3 Dérivées et primitives

■ Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

■ Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) > 0$, est la fonction F telle que $F(x) = \ln(u(x)) + C$ avec C réel.

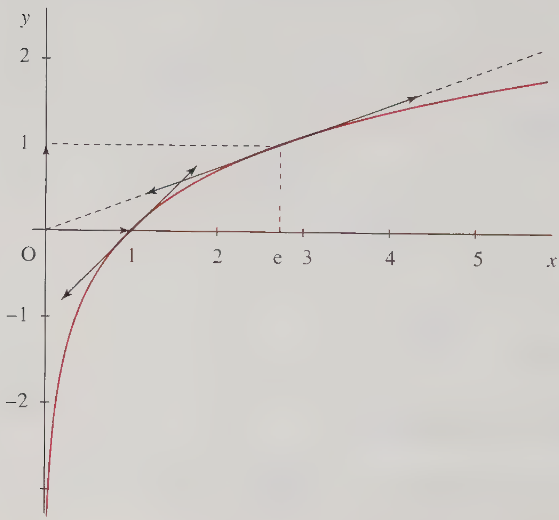
4 Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$.

5 Tableau de variations et courbe représentative

x	0		1	e	$+\infty$
$x \mapsto \ln x$	‖	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$



6 Équivalences importantes

$a > 0,\ b > 0$: $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$
(ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$) ;
$a > 0,\ b > 0$: $\ln a \leqslant \ln b$ équivaut à $a \leqslant b$
(ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) ;
$a > 0$: $\ln a = b$ équivaut à $a = e^b$.

7 Fonction logarithme décimal

On appelle logarithme décimal du réel strictement positif a, le réel défini par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. On utilise parfois la notation lg à la place de log.

$$\begin{cases} \log x = y \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad x = 10^y.$$

2 Fonctions exponentielles

1 Définition

La fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp(x) = e^x \end{array}$$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x = e^y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2 Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$e^x > 0$; $\qquad (\exp)'(x) = e^x$; $\qquad \ln(e^x) = x$;

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b,\quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$; $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b},\quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$;

$(e^a)^b = e^{ab},\quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$; $\qquad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a},\quad a \in \mathbb{R}$.

3 Sens de variation

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$a > b$ équivaut à $e^a > e^b$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

4 Primitives

Une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^x$.
Si u est dérivable sur l'intervalle I alors la fonction g définie par $g(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

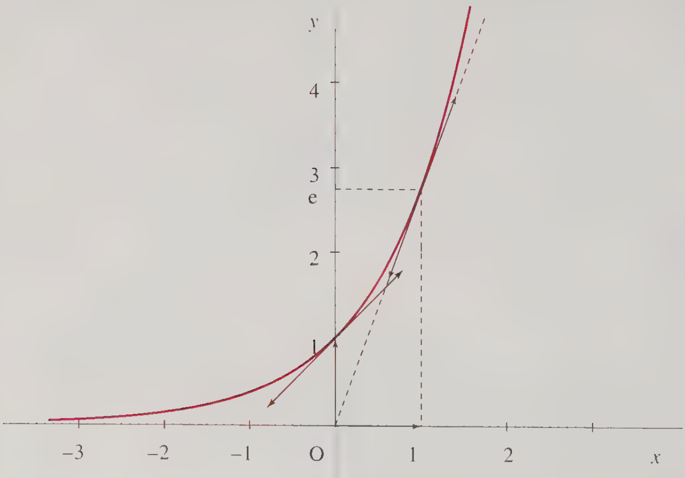
Sur un intervalle, les primitives de la fonction f définie par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions F telles que $F(x) = e^{u(x)} + C$.

5 Limites usuelles

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \,; \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \,; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \,; \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \,; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6 Tableau de variations et courbe représentative

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto e^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$



7 Équivalences importantes

$\begin{cases} \ln x = y \\ x > 0 \end{cases}$ équivaut à $x = e^y$; $\begin{cases} e^x = y \\ y > 0 \end{cases}$ équivaut à $x = \ln y$.

8 Fonction exponentielle de base *a*

Définition

Soit un réel strictement positif a.
Pour tout x réel, on pose : $a^x = e^{x \ln a}$.
Si de plus, $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.

Propriétés

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x \ln a$.
Pour tous les réels x et y et tous les réels a et b strictement positifs, on a :
$a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

3 Fonctions puissances

1 Définition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α l'application :

$$\varphi_\alpha :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha \quad \text{avec} \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

2 Propriétés

Dérivée

φ_α est dérivable et strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$.
$\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x > 0$.

Limites

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha$	0	$+\infty$

Primitive

Soit α un réel différent de -1.

Une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de $x \mapsto x^{\alpha}$ est :

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : \mathrm{I} \to\ ]0\,;\,+\infty[$ une fonction dérivable sur I ; soit α un réel différent de -1, une primitive sur I de $x \mapsto (u(x))^{\alpha}u'(x)$ est :

$$x \mapsto \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

4 Croissances comparées

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0\,; \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha}\ln x = 0.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha}\mathrm{e}^{x} = 0\,;$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}} = 0\,;$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty.$

Pour $a \in\ ]1\,;+\infty[$ et $\alpha \in\ ]0\,;+\infty[$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^{\alpha}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour $|a| < 1$ et $\alpha > 0$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha}a^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

5 Équations différentielles

Soit (E) l'équation différentielle $g(y)y' = h(x)$ où h et g sont des fonctions continues sur un intervalle I.

Pour qu'une fonction f dérivable sur I soit solution de (E), il faut et il suffit que la fonction $x \mapsto G[f(x)] - H(x)$ soit constante sur I, G et H désignant des primitives de g et h sur I.

Il n'est pas toujours possible d'obtenir explicitement f en fonction de x.

Soit φ une fonction numérique de deux variables réelles. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre $y' = \varphi(x, y)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble S des fonctions f, définies et dérivables sur I, telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = \varphi(x, f(x)).$$

■ Équations différentielles $y' - ay = 0$ et $y' - ay = g(x)$, où a est un réel.

• Résolution de l'équation $y' - ay = 0$.

Les solutions de cette équation sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle arbitraire .

• Résolution de l'équation $y' - ay = g(x)$, où g est une fonction continue sur un intervalle I.

Les solutions de cette équation différentielle s'obtiennent en ajoutant à l'une d'entre elles chacune des solutions de l'équation $y' - ay = 0$.

1 Avant d'effectuer tout calcul concernant la fonction ln :

- on doit déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel on va travailler.

Ne pas confondre $\ln A$ et A : A doit être un réel strictement positif alors que $\ln A$ peut être un réel négatif ($\ln(0{,}5) < 0$).

Il faut aussi avoir en tête que $\ln A > 0$ pour $A > 1$ et $\ln A < 0$ pour $0 < A < 1$.

2 La fonction dérivée

- $x \mapsto \ln x$ a pour dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Mais attention, ne pas en déduire que la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$.

Pour éviter toute ambiguïté, utiliser systématiquement la formule $\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, même si $u(x) = x$ (car on retrouve bien $\frac{1}{x}$).

3 Rappelons que pour l'étude de fonctions, on doit :

- préciser le signe de la fonction dérivée avant de dresser le tableau de variations ;

- justifier les calculs de limites (avec notamment les croissances comparées), et donner les asymptotes s'il y a lieu.

4 Dans toute équation du type :

$$a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0,$$

- il est habituel de poser $\ln x = X$ pour $x > 0$ afin de se ramener à la résolution connue d'une équation.
- Ne pas confondre $(\ln x)^2$ (carré du logarithme de x) et $\ln(x^2)$ (logarithme du carré de x).

5 L'équivalence $\begin{cases} \ln a = \ln b \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases}$

traduit le fait que la fonction ln est une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

L'équivalence $\begin{cases} \ln a > \ln b \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > b > 0$ traduit le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

6 Des remarques du même type que les précédentes se retrouvent pour la fonction exponentielle

La méthode suivie lors de la résolution d'équations faisant intervenir des exponentielles (e^x, e^{-x}, e^{2x}, ...) consiste à poser $e^x = X$ et à se ramener ensuite à la résolution connue de certaines équations.

Attention :

- l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;
- l'équation $\begin{cases} \ln x = -2 \\ x > 0 \end{cases}$ a pour solution $x = e^{-2}$.

7 La fonction dérivée de $x \mapsto e^x$:

- est $x \mapsto e^x$,
- mais le fait que la fonction dérivée soit égale à la fonction donnée ne s'applique pas au cas $x \mapsto a^x$, si $a \neq e$. Afin d'éviter toute erreur, comme pour la fonction ln, utiliser systématiquement :

$$x \mapsto e^{u(x)} \text{ a pour fonction dérivée } x \mapsto u'(x)e^{u(x)}.$$

8 L'équivalence $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

- traduit le fait que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
- L'équivalence $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$ traduit le fait que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

9 Attention :

- e^{-2} a un sens alors que l'équation $e^x = -2$ n'admet pas de solution;
- $a^x = e^{x \ln a}$ pour $a > 0$.

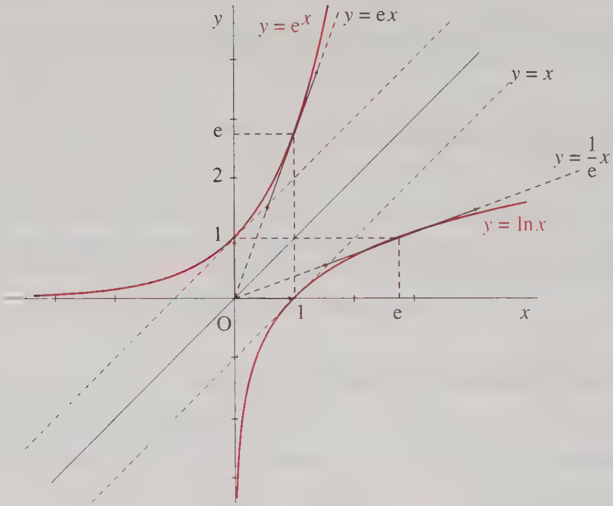
10 Les seuls résultats (limites, équivalences, croissances comparées, ...) à retenir sont ceux du COURS

Toute autre formule nécessaire pour résoudre un exercice, le jour du bac, sera donnée dans l'énoncé $\left(\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ par exemple} \right)$.

11 Mémoriser

■ L'allure des courbes associées aux fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations $x \mapsto e^x$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



x	0	1	e	$+\infty$
Variations $x \mapsto \ln x$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

12 Comment déterminer la limite d'une fonction comportant :

■ **la fonction ln ?**

Faire apparaître des expressions de la forme $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ ou $x^\alpha \ln x$ avec $\alpha > 0$ et utiliser le cours.

Exemples :

- $f(x) = x^3 + 2 - \ln x$ pour $x \to +\infty$.

$f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{\ln x}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$.

- $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x+1}$ pour $x \to +\infty$.

$f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

- $f(x) = 5x(\ln x)^2$ pour $x \to 0$.

$f(x) = 5(\sqrt{x}\ln x)^2$ avec $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right) = 0$.

■ **la fonction exp ?**

Faire apparaître des expressions de la forme $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$ ou $x^\alpha e^{-x}$ avec $\alpha > 0$ et utiliser le cours.

Exemples :

- $f(x) = 3x^2 + 1 - e^x$ pour $x \to +\infty$.

$f(x) = x^2\left(3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{e^x}{x^2}\right)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

- $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3 + x^2}$ pour $x \to +\infty$.

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^3} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$.

- $f(x) = x^3 e^{-2x}$ pour $x \to +\infty$.

$f(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} e^{-x}\right)^2$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} = 0$.

13 Comment résoudre une équation comportant des logarithmes ?

■ Déterminer, avant tout calcul, l'ensemble de définition de l'équation.

■ Transformer l'équation proposée pour la ramener à une équation équivalente du type $\ln A = \ln B$ $(A > 0, B > 0)$ puis à une équation équivalente du type $A = B$, car la fonction ln réalise une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

■ Si l'équation proposée comporte des expressions du type $(\ln x)^3$, $(\ln x)^2$ il peut être intéressant de poser $X = \ln x$.

14 Comment résoudre une inéquation comportant des logarithmes ?

■ Déterminer, avant tout calcul, l'ensemble de définition de l'inéquation.

■ Transformer l'inéquation proposée pour la ramener à une inéquation équivalente du type $\ln A > \ln B$ (ou $\ln A < \ln B$) avec $A > 0$ et $B > 0$ puis à une inéquation équivalente du type $A > B$ (ou $A < B$), car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

■ Si l'inéquation proposée comporte des expressions du type $(\ln x)^3$, $(\ln x)^2$, il peut être intéressant de poser $X = \ln x$.

15 Comment résoudre une équation comportant des exponentielles ?

■ Transformer l'équation proposée pour la ramener à une équation équivalente du type $e^A = e^B$ puis à une équation équivalente du type $A = B$, car la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

■ Si l'équation proposée comporte des expressions du type e^{3x}, e^{2x}, il peut être intéressant de poser $X = e^x$ avec $e^{3x} = X^3$, $e^{2x} = X^2$.

16 Comment résoudre une inéquation comportant des exponentielles ?

■ Transformer l'inéquation proposée pour la ramener à une inéquation équivalente du type $e^A > e^B$ (ou $e^A < e^B$) puis à une inéquation équivalente du type $A > B$ (ou $A < B$), car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

■ Si l'inéquation proposée comporte des expressions du type e^{3x}, e^{2x}, … il peut être intéressant de poser $X = e^x$ avec $e^{3x} = X^3$, $e^{2x} = X^2$.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** Pour tout nombre réel non nul t, $\ln(t^2) = 2\ln t$.

▶ **2.** Pour tout nombre réel t de $]-1\ ;\ 1[$, $\ln(1+t) + \ln(1-t) = \ln(1-t^2)$.

▶ **3.** La fonction numérique f définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

▶ **4.** La fonction numérique f définie par $f(x) = \ln(2x)$ pour $x > 0$ admet pour fonction dérivée $x \mapsto f'(x) = \dfrac{1}{2x}$.

▶ **5.** La fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ admet pour fonction dérivée sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -e^{-x}$.

▶ **6.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (3 - x^2 + 2\ln x) = -\infty$.

▶ **7.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5 + 2\ln x) = +\infty$.

▶ **8.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 7 + 2\ln x) = +\infty$.

▶ **9.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{x^2+1}{3x}\right) = +\infty$.

▶ **10.** Le nombre $e^{0,5\ln x}$ s'écrit aussi $0,5^x$ pour $x > 0$.

▶ **11.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = +\infty$.

▶ **12.** La fonction $x \mapsto \sqrt{x} - \ln(x^5)$ pour $x > 0$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

▶ **13.** La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ admet pour fonction dérivée $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

▶ **14.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = 0$.

▶ **15.** L'équation $e^{-x} = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

▶ **16.** $e^{x\ln 1,1}$ s'écrit aussi $1,1^x$.

▶ **17.** Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f'(x) = e^{-x^2}$.

Soit g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(\sqrt{x})$.

Alors, pour tout $x > 0$:

a. $g'(x) = e^{-x}$;

b. $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}e^{-x^2}$;

c. $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$;

d. $g'(x) = \dfrac{2x-1}{4x\sqrt{x}}e^{-x}$;

e. $g'(x) = -2\sqrt{x}e^{-x}$.

▶ **18.** Parmi les fonctions suivantes, la fonction f_5 admet, en $x = 1$, le nombre dérivé le plus grand.

a. $f_1(x) = e^{x^2}$; **b.** $f_2(x) = x^2e^x$; **c.** $f_3(x) = e^{\sqrt{x}}$;

d. $f_4(x) = \sqrt{e^x}$; **e.** $f_5(x) = e^{x\sqrt{x}}$.

▶ **19.** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$. Alors :

a. $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x+1)^2}e^{\frac{x^2}{x+1}}$; **b.** $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}e^{\frac{x^2}{x+1}}$;

c. $f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1)}{x+1}e^{\frac{x^2}{x+1}}$.

▶ **20.** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Alors :

a. $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}$; **b.** $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}$; **c.** $f'(1) = e^{\sqrt{2}}$;

d. $f'(1) = 2e^{\sqrt{2}}$; **e.** $f'(1) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

▶ **21.** $x \mapsto e^{5x} + 2$ est solution de l'équation différentielle $y' - 5y = 0$.

2 Réponses

▶ **1.** La proposition est fausse. Donnons un contre-exemple :

$$\ln(-2)^2 = \ln 4, \quad \text{mais} \quad \ln(-2) \text{ n'existe pas.}$$

▶ **2.** Pour tout réel t de $]-1\,;1[$, $1 + t > 0$ et $1 - t > 0$, donc :

$$\ln(1+t) + \ln(1-t) = \ln[(1-t)(1+t)]$$
$$\ln(1+t)(1-t) = \ln(1-t^2).$$

L'affirmation est correcte.

▶ **3.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
La phrase est correcte.

▶ **4.** La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln 2x$ admet pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$. La phrase proposée est fausse.

▶ **5.** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ s'écrit aussi $f(x) = e^{-x}$.

Elle admet pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -e^{-x}$.

La proposition est correcte.

▶ **6.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (3 - x^2) = 3$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (3 - x^2 + 2\ln x) = -\infty$.

L'égalité donnée est correcte.

▶ **7.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5 + 2\ln x) = +\infty$.

L'égalité donnée est correcte.

▶ **8.** Il en est de même pour $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 7 + 2\ln x)$.

▶ **9.** Pour $x > 0$, $\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{x^2+1}{3x} = \dfrac{1}{x}\left(2\ln x - \dfrac{x^2+1}{3}\right)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2+1}{3} = \dfrac{1}{3}$,

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{x^2+1}{3x}\right) = -\infty$. La proposition est fausse.

▶ **10.** Pour $x > 0$, $e^{0,5\ln x}$ s'écrit aussi $(e^{\ln x})^{0,5} = x^{0,5}$ puisque $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$). La proposition est fausse.
Rappelons que $0,5^x$ s'écrit $e^{x\ln 0,5}$.

▶ **11.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ (croissances comparées), donc la proposition est fausse.

▶ **12.** Pour $x > 0$, $\sqrt{x} - \ln(x^5) = \sqrt{x} - 5\ln x$.

$$\sqrt{x} - \ln(x^5) = \sqrt{x}\left(1 - 5\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (croissances comparées).

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \ln(x^5)) = +\infty$. La proposition est correcte.

▶ **13.** u désignant une fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$, par exemple, on a : $(e^u)' = u'e^u$.

Donc $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ admet pour fonction dérivée sur $]0\,;+\infty[$, $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

La proposition fournie est fausse.

▶ **14.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ est correct d'après le résultat sur les croissances comparées.

▶ **15.** L'équation $e^{-x} = 2$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$, $-x = \ln 2$ soit $x = -\ln 2$, en revanche, l'équation $e^x = -2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La proposition est donc fausse.

▶ **16.** $e^{x\ln 1,1} = (e^{\ln 1,1})^x = 1,1^x$. La réponse est correcte.

▶ **17.** **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Vrai ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **18.** **a.** La proposition est fausse ; c'est f_2 qui admet, en $x = 1$, le nombre dérivé le plus grand.

▶ **19.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **20.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **21.** $f(x) = e^{5x} + 2$

$f'(x) = 5e^{5x}$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) - 5f(x) = 5e^{5x} - 5e^{5x} - 10$

$$f'(x) - 5f(x) = -10.$$

La fonction $x \mapsto e^{5x}$ est une solution de $y' - 5y = 0$.

La fonction $x \mapsto 2e^{5x}$ est une solution de $y' - 5y = 0$.

Mais $x \mapsto e^{5x} + 2$ n'est pas une solution de $y' - 5y = 0$.

GÉRER SES CONNAISSANCES

Dans les exercices suivants, pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

$\mathcal{D}$ désigne son ensemble de définition et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

a. $\mathcal{D} =]1\,;+\infty[$;

b. $(\mathcal{C})$ admet une unique tangente horizontale;

c. la fonction f est décroissante sur $]1\,;+\infty[$;

d. la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. f est définie pour tout réel x tel que $\frac{x-1}{x} > 0$ c'est-à-dire pour $x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$.

b. Pour tout $x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)} = \frac{(2-x)(x+1)}{2x(x-1)}.$$

Cette dérivée s'annule pour -1 et 2, donc $(\mathcal{C})$ admet deux tangentes horizontales.

c. Sur $]-1\,;+\infty[$, f' n'est pas toujours positive. Elle est négative sur $]2\,;+\infty[$.

d. Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - 1$

$$f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) - 1$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) - 1\right] = -1$ et non 0, donc le résultat annoncé est faux.

▶ **2.** Soit pour tout x de $]3\,;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$. Alors :

a. pour tout x de $]3\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x-3}{x+1}$;

b. pour tout x de $]3\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$;

c. f est décroissante sur $]3\,;+\infty[$;

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Pour tout x de $]3\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}$.

b. On sait que $\ln X \geqslant 0$ pour $X \geqslant 1$. Or, $\dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 1$ pour $x \geqslant 3$.

c. Pour $x \in\,]3\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est bien décroissante sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$.

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-3} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

► **3.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx}$.

On pose : $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{1+e^x}$. Alors :

a. pour tout réel x, on a $f(x) = \dfrac{e^{6x}+1}{e^x+1}$;

b. $f(\ln 2) = \dfrac{65}{3}$;

c. g n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

■ **Réponses : a. Faux; b. Faux; c. Faux.**

■ **Justifications :**

a. $f(x)$ est la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison $-e^x$ et de premier terme 1. Nous avons donc :

$$f(x) = \frac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)} = \frac{1-e^{6x}}{1+e^x}.$$

b. $f(\ln 2) = \dfrac{1-e^{6\ln 2}}{1+e^{\ln 2}}$, soit $f(\ln 2) = \dfrac{1-2^6}{3}$, car $e^{\ln 2} = 2$ et $f(\ln 2) = -\dfrac{63}{3}$.

c. Pour tout réel x, $g'(x) = f'(x) + \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$,

or $\quad f'(x) = \dfrac{-6e^{6x}(1+e^x)-(1-e^{6x})e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f'(x) = -\frac{6e^{6x}+5e^{7x}+e^x}{(1+e^x)^2}$$

et $\quad g'(x) = -\dfrac{6e^{6x} + 5e^{7x} + e^{x}}{(1+e^{x})^2} + \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$$g'(x) = -\frac{6e^{6x} + 5e^{7x}}{(1+e^{x})^2},$$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

▶ 4. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x+1} - e}{x}$, et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e$;

b. l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$;

c. on a, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e}{x^2}[(x-1)e^{2x} + 1]$;

d. la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ passe par le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2(e^2+e)\right)$.

■ **Réponses : a. Faux; b. Vrai; c. Faux; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Soit g la fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = e^{2x+1}$.

Nous avons $f(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ et alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g'(0)$, soit $2e$ car $g'(x) = 2e^{2x+1}$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x+1} - e) = -e$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$. En revanche ce n'est pas le cas au voisinage de $+\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Pour tout réel x non nul, on a : $\quad f'(x) = \dfrac{2xe^{2x+1} - 1(e^{2x+1} - e)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{e[2xe^{2x} - e^{2x} + 1]}{x^2}.$$

$f'(x) = \dfrac{e}{x^2}[(2x-1)e^{2x} + 1]$, ce qui ne correspond pas au résultat proposé.

d. La tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour équation :

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(e^2 - e)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4e$, donc une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est donnée par $y - 2e^2 + 2e = 4e\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ou encore $y = 4ex + 2e^2 - 4e$ et pour $x = \frac{3}{2}$, nous avons $y = 2e$, ce qui ne correspond pas au point annoncé.

▶ **5.** Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2} + 2x - 5.$$

D désigne son ensemble de définition et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

a. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et, pour tout x de $\mathscr{D}$, on a $f'(x) = 2\frac{e^{x^2} - 6e^x + 4}{(e^x - 2)^2}$.

b. $(\mathscr{C})$ admet la droite Δ d'équation $y = -2x - 8$ comme tangente en un point.

c. $(\mathscr{C})$ n'admet pas d'autre tangente parallèle à Δ.

d. Les droites Δ_1, d'équation $y = 2x - 4$ et Δ_2 d'équation $y = 2x - 6$ sont asymptotes à $(\mathscr{C})$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. f est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 2)^2} + 2$$

$$f'(x) = \frac{-4e^x + 2(e^x - 2)^2}{(e^x - 2)^2} = \frac{2e^{2x} - 12e^x + 8}{(e^x - 2)^2}$$

c'est-à-dire $f'(x) = 2\frac{e^{2x} - 6e^x + 4}{(e^x - 2)^2}$, ce qui ne correspond pas au résultat annoncé, car il y a confusion entre e^{x^2} et e^{2x}.

b. Le coefficient directeur de Δ est -2. On doit d'abord vérifier que l'équation $f'(x) = -2$ admet bien une solution.

$f'(x) = 2\dfrac{e^{2x} - 6e^x + 4}{(e^x - 2)^2} = -2$ équivaut à : $e^{2x} - 6e^x + 4 = -(e^x - 2)^2$

$$e^{2x} - 6e^x + 4 = -e^{2x} + 4e^x - 4$$

$$2e^{2x} - 10e^x + 8 = 0$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$

équivaut à $e^x = 1$ ou $e^x = 4$

soit $x = 0$ ou $x = 2\ln 2$, or $f(0) = -8$,

on peut conclure que $(\mathscr{C})$ admet la droite Δ d'équation $y = -2x - 8$ comme tangente en un point, ce point ayant pour abscisse 0.

c. L'équation $f'(x) = -2$ admet deux solutions donc Δ est parallèle à une autre tangente à $(\mathscr{C})$.

d. $f(x) - (2x - 4) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 2} - 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 4)) = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x - 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$, en revanche, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 4)) = -2$ cette droite n'est donc pas asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

$f(x) - (2x - 6) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 2} + 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 6)) = 0$,

mais $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 6)) = 2$, donc la droite d'équation $y = 2x - 6$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$ uniquement.

6. Soit, pour tout x réel de $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$. Alors :

a. pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} - 1$;

b. f est décroissante sur $\mathbb{R}$;

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

e. il existe un unique a de $\mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Vrai.

Justifications :

a. Pour tout x réel, nous avons $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} - 1$, car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ pour u fonction strictement positive. Le résultat annoncé est incorrect.

b. Pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et $f'(1) = 0$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left[x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right] - x$

et

$$\lim_{x \to +\infty}\left[2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - x\right] = \lim_{x \to +\infty}\left(x\left[\frac{2\ln x}{x} - 1\right] + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = -\infty,$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty.$

e. La fonction numérique f est dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution a.

7. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1} - \dfrac{x}{2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative. Alors :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

b. la droite D d'équation $y = -\dfrac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathscr{C})$;

c. f est croissante sur $\mathbb{R}$;

d. l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique.

Réponses : a. Faux; b. Vrai; c. Faux; d. Vrai.

Justifications :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0,$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{2} = -\infty.$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2+1} = 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0,$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(-\dfrac{x}{2}\right)\right] = 0,$

d'où la droite D d'équation $y = -\dfrac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

c. Pour tout réel x, nous avons : $$f'(x)=\frac{-\mathrm{e}^{-x}(x^2+1)-\mathrm{e}^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}$$

f' est négative sur $\mathbb{R}$ avec $f'(-1)=0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. f est décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, donc l'équation $f(x)=0$ a une solution unique.

▶ 8. Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative. Alors :

a. f est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\left[\dfrac{\mathrm{e}^3}{27}\,;+\infty\right[$;

b. la droite Δ d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$;

c. $(\mathscr{C})$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses et elle est obtenue au point d'abscisse 3;

d. la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=-2\mathrm{e}x-\mathrm{e}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$f'(x)=\dfrac{x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x}{x^6}=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-3)}{x^4}\cdot$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-3$ et f est décroissante sur $]0\,;3[$ et croissante sur $]3\,;+\infty[$, donc f ne réalise pas une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\left[\dfrac{\mathrm{e}^3}{27}\,;+\infty\right[$.

b. Par exemple, $f(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{8}\approx 0{,}92$ et $f(4)=\dfrac{\mathrm{e}^4}{64}\approx 0{,}85$, donc

$f(3-1)\neq f(3+1)$ et alors la droite Δ, d'équation $x=3$, n'est pas un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.

c. f' ne s'annule que pour la valeur $x=3$ donc $(\mathscr{C})$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses et elle est obtenue au point d'abscisse 3.

d. $f'(1)=-2\mathrm{e}$ et $f(1)=\mathrm{e}$, donc une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y-f(1)=-2\mathrm{e}(x-1),\quad \text{c'est-à-dire}\quad y=-2\mathrm{e}x+3\mathrm{e}.$$

9. Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative. Alors :

a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,;$$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\,;$

c. l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle;

d. la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.

Justifications :

a. Pour tout x réel, $1 + e^x > 0$ et par conséquent f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car cette fonction est la composée de $x \mapsto e^x = X$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et de la fonction rationnelle $X \mapsto \dfrac{X}{1+X}$, dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel :
$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}.$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c. Nous savons que $f'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$, donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

d. Pour tout x réel, nous avons :

$$f(x) - (x+1) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) - x - 1$$
$$f(x) - (x+1) = \frac{-1}{1+e^x} - \ln\left[e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] - x$$

$f(x) - (x+1) = \dfrac{-1}{1+e^x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)$, car $\ln(e^x) = x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

▶ **10.** Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{3^x + \sin \pi x}{x}$ pour $x \neq 0$.
Alors :

a. $f'(1) = -2 - \pi$;

b. $f'(1) = 3\ln 3 - 4$;

c. $f'(1) = 3(\ln 3 - 1) + \pi$;

d. $f'(1) = 3(\ln 3 + 1) - \pi$;

e. $f'(1) = 3(\ln 3 - 1) - \pi$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

Pour tout réel x non nul, $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{x\ln 3} + \sin \pi x)$

et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}(e^{x\ln 3} + \sin \pi x) + \dfrac{1}{x}(e^{x\ln 3}\ln 3 + \pi \cos \pi x)$.

$f'(1) = -(e^{\ln 3} + \sin \pi) + (e^{\ln 3}\ln 3 + \pi \cos \pi)$, or $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$ et $e^{\ln 3} = 3$.

D'où : $f'(1) = -(3 + 0) + (3\ln 3 - \pi)$, soit $f'(1) = 3(\ln 3 - 1) - \pi$.

La réponse correcte est **e.**

SUJETS Se préparer à l'examen

EXOS Exercices d'application

1 Exprimer à l'aide de ln2 et ln3 :

a. $\ln 4$ **b.** $\ln(-4)^2$ **c.** $\ln 36$ **d.** $\ln \dfrac{2}{27}$

e. $\ln \sqrt{6}$ **f.** $\ln \dfrac{9}{8}$ **g.** $\ln\left(16\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

2 Soit f et g deux fonctions numériques de courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ dans un repère du plan.

Pour tout $x > 0$, $f(x) - g(x) = \dfrac{3\ln x}{x^3}$.

Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

3 **1.** Calculer la fonction dérivée de $x \mapsto \dfrac{3 - e^x}{e - 3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la fonction dérivée de $x \mapsto \ln(e^x + 1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

a. $f(x) = 5x - 7x^2 - 3\ln x$;

b. $g(x) = \dfrac{3\ln x}{x^3} - \dfrac{3x}{5}$;

c. $h(x) = 3x^2 - 1 + 5\ln x$.

5 Soit a et b deux réels et g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax + b\ln(x+1).$$

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

6 Résoudre les équations suivantes sur $]0\,;+\infty[$:

a. $\dfrac{6\ln x + 1}{3x} = 0\,;$ (1)

b. $\dfrac{3 - 5\ln x + \dfrac{x^3}{4}}{x^3} = \dfrac{1}{4}\cdot$ (2)

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $e^{2x+5}\cdot e^{x+1} = e^{x-1}$; (1)

b. $\ln(2x+5)(x+1) = \ln(x-1)$. (2)

8 Déterminer les limites de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}$ aux bornes de son ensemble de définition $\mathcal{D}_\varphi$.

9 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ où a, b, c désignent trois nombres réels.
Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer a, b et c pour que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (Γ) passe par O ;
- $f'\left(\ln\dfrac{3}{4}\right) = 0$;
- la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à (Γ).

10 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{x^7+1}$; **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+3}{e^x+2}$;

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$ $(k \neq 0)$; **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x}+x+2)$.

11 L'étude de la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur mène à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) + 10^3u(t) = 5\cdot 10^3 \quad \text{(E)} \quad \text{avec } t \geqslant 0.$$

1. Déterminer les fonctions u_1 solutions de l'équation différentielle sans second membre $u'(t) + 10^3u(t) = 0$.

2. Vérifier que la fonction u_2 définie par $u_2(t) = 5$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $u'(t) + 10^3u(t) = 5\cdot 10^3$.

3. On admet que toute solution u de l'équation différentielle (E) est une fonction définie, pour $t \geqslant 0$, par $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, où u_1 est l'une quelconque des fonctions trouvées à la question **1**.
Déterminer complètement $u(t)$, si $u(0) = 0$.

12 Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ l'équation différentielle $y' = xy$ sachant que pour $x = 0$, $y = 1$ en utilisant la méthode d'Euler.

13 Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ l'équation différentielle $y' = t + 1 + y$ sachant que $y(0) = 0$ en utilisant la méthode d'Euler (vous vérifierez que $t \mapsto -t-2$ est une solution particulière).

EXOS Exercices de synthèse

14 La fonction numérique f a pour tableau de variations :

x	-1		1		$+\infty$
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1. D'après la lecture de ce tableau, répondre aux questions suivantes :

a. quelles sont les limites de f aux bornes de $]-1\ ;\ +\infty[$?

b. quels sont les intervalles de longueur maximum où f est monotone et quel est le sens de variations de f sur chacun de ces intervalles ?

c. la fonction f admet-elle un extremum sur $]-1\ ;\ +\infty[$?
Si oui, quelle est sa valeur ?

d. quel est le signe de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$?

2. Par hypothèse, la fonction f est l'une des quatre fonctions suivantes qui sont définies, dans $]-1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f_1(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4)\ ; \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\ ;$$

$$f_3(x) = \mathrm{e}^{(-x^2+2x)}\ ; \qquad f_4(x) = \ln\frac{2x+2}{x^2+3}.$$

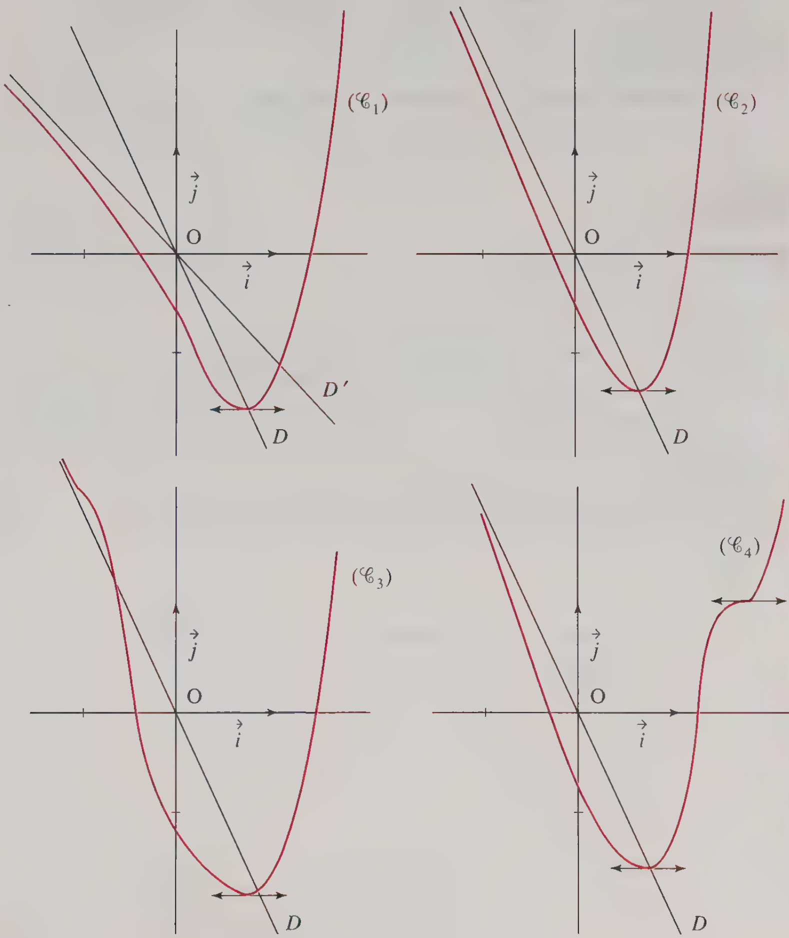
a. Calculer $f_1(1)$.

b. Quel est le signe de f_2 ?

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x)$.

d. Conclure.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
On note D la droite d'équation $y = -2x$ et D' la droite d'équation $y = -x$.
Parmi les courbes suivantes, $(\mathscr{C})$ est la courbe $(\mathscr{C}_2)$. Il s'agit, dans cette première partie, de démontrer que les autres ne peuvent pas représenter la fonction f.
On admet que les courbes données ci-après rendent compte du comportement des fonctions représentées aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$. Toutes les tangentes parallèles à l'axe des abscisses sont indiquées sur les graphiques.



1. a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

On pourra écrire $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)$.

c. Peut-on éliminer l'une des courbes ?

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 2).$$

b. Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ?

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Déterminer la limite de $f(x) + 2x$ quand x tend vers $-\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ?

4. a. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

b. Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ?

BAC *L'épreuve*

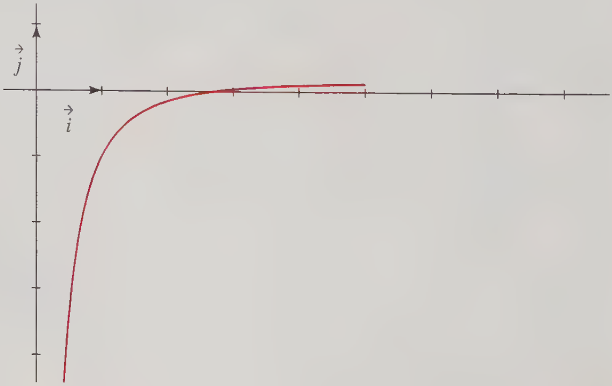
16 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1+\ln x}{x}$. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan ci-dessous et la courbe de f est fournie par une calculatrice graphique.

D'après cette représentation graphique, il semble que :

P_1 : les axes de coordonnées $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$ et $(\mathrm{O}\,;\vec{j})$ sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$;

P_2 : la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$;

P_3 : la fonction f change de signe sur $]0\,;+\infty[$.



1. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

(On pourra mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{1}{x}(-1 + \ln x)$.)

c. P_1 est-elle justifiée ?

2. a. Justifier que la dérivée de f est définie par $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$.

b. Déterminer le sens de variation de f.

c. P_2 est-elle vraie ?

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Déterminer le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses.

b. Déterminer le signe de $f(x)$.

c. P_3 est-elle vraie ?

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 1.

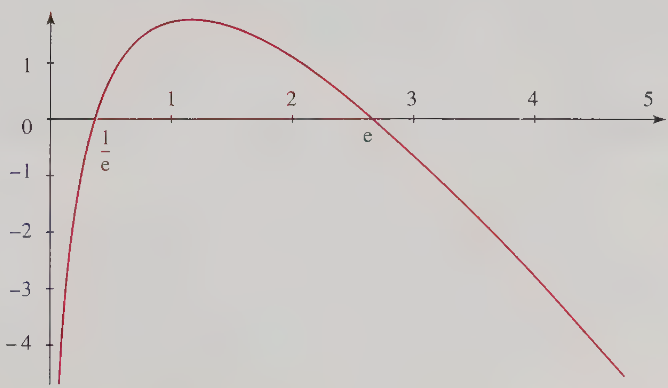
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente T dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

17 **A.** Soit f une fonction définie sur $[0\,;5]$, dérivable sur $]0\,;5]$. Sa fonction dérivée f' est représentée graphiquement ci-dessous.

1. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ pour $x \in\ ]0\,;5]$.

2. On donne :

$$f(0) = \frac{2-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}, \quad f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{2}{\mathrm{e}}, \quad f(\mathrm{e}) = 2, \quad f(1) = 0.$$



a. Construire le tableau de variations de f.

b. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α dans $\left]\frac{1}{e} ; e\right[$ tel que :

$$f(x) = 0.$$

Désormais, *on supposera que* $\alpha = 1$.

c. Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{e} ; e\right]$.

d. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan définie par :

$$\frac{1}{e} \leqslant x \leqslant e \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f'(x).$$

Donner le résultat exact, puis le résultat arrondi à 10^{-2} près.

B. Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{2}{e} ; 2\right]$ par $g(x) = \ln(1 + x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Étudier ses variations et dresser son tableau de variations.

2. Soit h la fonction composée de g et de f : $h = g \circ f$. On étudie h sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; e\right]$.

a. Calculer $h(e)$, $h(1)$, $h\left(\frac{1}{e}\right)$. On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

b. Déterminer le sens de variations de h.

c. Justifier que :

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)}.$$

Calculer $h'(e)$, $h'\left(\frac{1}{e}\right)$.

d. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de h, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

On représentera en particulier les points d'abscisses e ; 1 ; $\frac{1}{e}$ et les tangentes en ces points.

On pourra résumer les résultats de cette partie dans le tableau suivant :

x	$\frac{1}{e}$	1	e
$h(x)$			
$h'(x)$		1,8	
Nom du point de $(\mathscr{C})$	A	B	C

18

Partie A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}} + 2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ [unité sur $(O\,;\,\vec{i})$, 1 cm et sur $(O\,;\,\vec{j})$, 5 cm].

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes de $\mathscr{C}$.

2. Donner l'équation de T tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Tracer $\mathscr{C}$, la tangente et les asymptotes.

4. a. Trouver la primitive de f qui s'annule en 0.

b. Calculer le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire de la surface comprise entre l'axe des x, l'axe des y, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = 5$.

Partie B. Étude d'un cas pratique

1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi :

$$g' = \frac{g}{5} \quad (1),$$

où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).

a. Résoudre l'équation différentielle (1).

b. Sachant qu'à la date $t = 0$ la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de $g(t)$.

c. Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle pour la première fois 4 milliers de poissons ?

2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépendant de l'effectif total). La population suit la loi :

$$g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15} \quad (2).$$

a. On pose $h = \dfrac{g}{3 - g}$ et on suppose que pour tout t, on a $g(t) \neq 3$. Montrer que g est solution de (2) si et seulement si h est solution de (1).

b. Trouver les fonctions h solutions de (1), puis les fonctions g solutions de (2).

c. Trouver la fonction g solution de (2) telle que $g(0) = 1$ et montrer que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie **A.**

d. Vers quelle limite tend la population de poissons ?

19 On injecte une dose d'une substance médicamenteuse dans le sang à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). On note $Q(t)$ dans la partie A, $S(t)$ dans la partie B la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
Pour les graphiques, le plan $\mathcal{P}$ sera rapporté à un repère orthonormal, l'unité graphique étant 2 cm.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. La dose est injectée par piqûre intraveineuse

À l'instant $t = 0$, on injecte par piqûre intraveineuse une dose de 1,8 unité. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On admet que le processus d'élimination peut se modéliser mathématiquement par l'équation différentielle :

$$Q'(t) = -\lambda Q(t),$$

où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que l'on a :

$$Q(t) = 1{,}8\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Calculer la valeur de λ, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

2. Étudier le sens de variation de Q pour $t \geqslant 0$, déterminer sa limite en $+\infty$, et tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de Q dans le plan P.

3. Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près [on ne demande pas la conversion en heures, minutes et secondes].

4. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t = 1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t = 2$, $t = 3$, etc.

On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a. Montrer que $R_1 = 1{,}8 + 0{,}7 \times 1{,}8$.

b. Montrer que $R_2 = 1{,}8 + 0{,}7R_1$ et calculer R_2.

c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

d. Montrer que pour tout entier n on a :

$$R_n = 6(1 - (0,7)^{n+1}).$$

e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

Partie B. La dose est injectée par piqûre intramusculaire

On injecte par piqûre intramusculaire, dans d'autres circonstances, une dose (non indiquée) de substance. La substance passe alors progressivement dans le sang. Les mesures effectuées conduisent à choisir, pour exprimer la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t :

$$S(t) = 6,6te^{-t}.$$

1. Étudier les variations de S pour $t \geqslant 0$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

2. Tracer la courbe représentative Γ de S dans le plan P, sur une feuille distincte de celle utilisée en **A. 2**, pour tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3. Montrer qu'à partir d'un certain instant $\tau > 1$ la quantité de substance présente dans le sang demeure inférieur à 0,1 unité. Calculer $S(5)$ et $S(6)$, puis utiliser la calculatrice pour donner une valeur décimale approchée de τ à 0,1 près.

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** $\ln 4 = \ln(2^2)$, soit $\ln 4 = 2\ln 2$, car $\ln(a^2) = 2\ln a$ pour $a > 0$.

b. $\ln(-4)^2 = \ln 16$ (ne pas écrire $2\ln(-4)$, car $\ln(-4)$ n'a pas de sens).
$\ln(-4^2) = \ln 2^4$, soit $\mathbf{\ln(-4)^2 = 4\ln 2}$,
car $\ln(a^n) = n\ln a$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

c. $\ln 36 = \ln(2^2 \times 3^2)$
$\ln 36 = \ln 2^2 + \ln 3^2$, car $\ln ab = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
$\mathbf{\ln 36 = 2\ln 2 + 2\ln 3}$.

d. $\ln \dfrac{2}{27} = \ln 2 - \ln 27$, car $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.

$\ln \dfrac{2}{27} = \ln 2 - \ln(3^3)$

$\mathbf{\ln \dfrac{2}{27} = \ln 2 - 3\ln 3}$.

e. $\ln\sqrt{6} = \dfrac{1}{2}\ln 6$ car $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$ pour $a > 0$.

$\mathbf{\ln\sqrt{6} = \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)}$.

f. $\ln \dfrac{9}{8} = \ln 9 - \ln 8 = \ln(3^2) - \ln(2^3)$

$\mathbf{\ln \dfrac{9}{8} = 2\ln 3 - 3\ln 2}$.

g. $\ln\left(16\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \ln 16 + \ln\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \ln(2^4) + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{3} = 4\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 3$

$\mathbf{\ln\left(16\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{9}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 3}$.

2 **Pour cela, étudions le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x > 0$.**

Nous avons : $x^3 > 0$ pour $x > 0$
$\ln x > 0$ pour $x > 1$
$\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$	||	$-$	0	$+$	

Il s'ensuit que :
pour $x > 1$, $f(x) > g(x)$ et $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$ sur $]1\,;+\infty[$;
pour $0 < x < 1$, $f(x) < g(x)$ et $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$ sur $]0\,;1[$.

3 **1.** Attention : $e-3$ est une constante.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{e-3}(3-e^x)$.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{e-3}(-e^x)$.

$$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{e-3}e^x.}$$

2. Soit $g : x \mapsto \ln(e^x+1)$ composée de la fonction $x \mapsto e^x+1$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ par la fonction $X \mapsto \ln X$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc g dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.}$$

4 **a.** f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $\boldsymbol{f'(x) = 5 - 14x - \dfrac{3}{x}}$.

b. Pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{15\ln x - 3x^4}{3x^3}$.

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ avec $x^3 \neq 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $\quad g'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{15}{x} - 12x^3\right)(3x^3) - (15\ln x - 3x^4)(9x^2)}{(3x^3)^2}$

$$g'(x) = \frac{45x^2 - 36x^6 - 135x^2\ln x + 27x^6}{9x^6}$$

$$g'(x) = \frac{45 - 36x^4 - 135\ln x + 27x^4}{9x^4}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{45 - 9x^4 - 135\ln x}{9x^4}.}$$

c. h est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $\quad \boldsymbol{h'(x) = 6x + \dfrac{5}{x}}$

$$\boldsymbol{h'(x) = \frac{6x^2+5}{x}}.$$

5 **Les hypothèses se traduisent par $f'(0) = 0$ et $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.**

Pour tout $x \in\ ]-1\,;+\infty[$, $\quad f'(x) = -2x + a + \dfrac{b}{x+1}$.

$f'(0) = 0 \quad$ équivaut à $0 = a + b$,

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0 \quad$ équivaut à $0 = -3 + a + \dfrac{2}{5}b$.

D'où : $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + \dfrac{2}{5}b = 3, \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 5 \\ b = -5. \end{cases}$

Ainsi, pour tout $x \in\ ]-1\,;+\infty[$, $\quad \boldsymbol{f(x) = -x^2 + 5x - 5\ln(x+1)}$.

6 **a.** (1) équivaut à $\begin{cases} 6\ln x + 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

(1) équivaut à $\begin{cases} \ln x = -\dfrac{1}{6} \\ x > 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = e^{-\frac{1}{6}} \\ x > 0. \end{cases}$

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \left\{e^{-\frac{1}{6}}\right\}}.$$

b. Pour $x > 0$, (2) équivaut à :

$$12 - 20\ln x + x^3 = x^3$$
$$12 = 20\ln x$$
$$\frac{3}{5} = \ln x$$
$$x = e^{\frac{3}{5}}.$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{3}{5}}\right\}}.$$

7 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a et b réels : $e^{2x+5} \cdot e^{x+1} = e^{3x+6}$,
car $\quad e^a \times e^b = e^{a+b}$.

L'équation (1) s'écrit alors $e^{3x+6} = e^{x-1}$.
La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où :
(1) équivaut à $3x + 6 = x - 1$

$$x = -\frac{7}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}\right\}.$$

b. Les solutions de (2) doivent appartenir à l'ensemble $\mathcal{D}$ défini par :

$$\begin{cases}(2x+5)(x+1) > 0 \\ x - 1 > 0\end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x \in \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right[\cup \left]-1\,;+\infty\right[\\ x > 1.\end{cases}$$

D'où $\mathcal{D} =]1\,;+\infty[$.

(2) équivaut à $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ \ln(2x+5)(x+1) = \ln(x-1).\end{cases}$

La fonction logarithme népérien réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ d'où :

(2) équivaut à $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ (2x+5)(x+1) = (x-1)\end{cases}$

(2) équivaut à $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ 2x^2 + 6x + 6 = 0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ x^2 + 3x + 3 = 0\end{cases}$

L'équation $x^2 + 3x + 3 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \varnothing.$$

8 $\varphi(x)$ existe si, et seulement si :

$$\begin{cases} x > 0 \text{ (existence de } \ln x) \\ x \geqslant 0 \text{ (existence de } \sqrt{x}) \\ \sqrt{x}\ln x \neq 0 \text{ (dénominateur du quotient, non nul).}\end{cases}$$

$x \in \mathcal{D}_\varphi$ si, et seulement si : $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ \ln x \neq 0\end{cases}$ soit $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1.\end{cases}$

Par suite : $\mathcal{D}_\varphi =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = -\infty, \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0^- \text{ (croissances comparées).}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = -\infty, \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sqrt{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln x = 0^-. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = +\infty, \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0^+. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = 0, \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty. \end{cases}$$

9 • (Γ) passe par O donc $f(0) = 0$ c'est-à-dire : $\mathbf{0 = a + b + c}$ (1)

• $f'(x) = 2ae^{2x} + be^{x}$ donc $f'\left(\ln\frac{3}{4}\right) = 0$ équivaut à :

$$2ae^{2\ln\frac{3}{4}} + be^{\ln\frac{3}{4}} = 0$$

$$2a\left(\frac{9}{16}\right) + \frac{3}{4}b = 0, \text{ car } e^{2\ln\frac{3}{4}} = e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\frac{9a}{8} + \frac{3b}{4} = 0 \text{ ou } \mathbf{3a + 2b = 0} \text{ (2).}$$

• La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à (Γ) donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(ae^{x} + b + ce^{-x}) = \infty$ avec le signe de a,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} (b + ce^{-x}) = b$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$. D'où $\mathbf{c = 1}$ (3).

En rassemblant les résultats (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b=0 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+2b=0 \\ c=1. \end{cases}$$

$$\text{équivalent à} \quad \begin{cases} a=-1-b \\ -3-3b+2b=0 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}$$

et $\boldsymbol{f(x) = 2e^{2x} - 3e^{x} + 1}$.

10 **a.** $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{x^7+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}{x^7\left(1+\dfrac{1}{x^7}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{x^7+1} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{e^x}{x^7}\right) \cdot \left(\frac{1+\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{1}{x^7}}\right)\right].$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^7} = +\infty$ (croissances comparées).

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1$, **car** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^7}\right) = 1$, **car** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^7 = +\infty$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0.$

D'où : $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{x^7+1} = +\infty}.$

b. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+3}{e^x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}\left(1+\dfrac{3}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+3}{e^x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x \cdot \frac{1+\dfrac{3}{e^{2x}}}{1+\dfrac{2}{e^x}}\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{e^{2x}}\right) = 1$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^{2x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{e^{x}}\right) = 1$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{x}} = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.

D'où : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}+3}{e^{x}+2} = +\infty}$.

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+kx)}{kx} \cdot k\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} = k \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{kx}$

$\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} = k}$, car $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ avec $u = kx$.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1 + \dfrac{x}{e^{-x}} + \dfrac{2}{e^{-x}}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(1 + xe^{x} + 2e^{x})$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + xe^{x} + 2e^{x}) = 1$.

D'où : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x + 2) = +\infty}$.

11 **1.** D'après les résultats du cours, nous pouvons dire que toute solution de l'équation différentielle $u'(t) + 10^3 u(t) = 0$ est de la forme $u_1 : t \mapsto Ae^{-10^3 t}$, où A désigne une constante réelle.

2. Pour tout $t \geqslant 0$, $u_2'(t) = 0$ et $0 + 10^3 \times 5$ est bien égal à $5 \cdot 10^3$. Donc u_2 est solution de l'équation différentielle $u'(t) + 10^3 u(t) = 5 \cdot 10^3$.

3. Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) = Ae^{-10^3 t} + 5$. De plus, $u(0) = 0$, donc $0 = A + 5$, soit $A = -5$.

En conclusion, pour tout réel t positif ou nul,

$u(t) = -5e^{-10^3 t} + 5 = 5(1 - e^{-10^3 t})$.

12 Calculons les valeurs de y prises par la fonction solution, en choisissant la subdivision de pas $h = 0,1$. Le tableau ci-dessous donne les résultats du calcul. La troisième colonne donne la valeur de l'expression $y_{k+1} - y_k = hf(t_k\,;\,y_k)$, c'est-à-dire dans le cas présent hx_ky_k soit $0,1x_ky_k$.

x_k	y_k	$0,1x_ky_k$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	0
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1$	0,01
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,01$	0,020 2
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,0302$	0,030 906
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,061\ 106$	0,042 444 24
$x_5 = 0,5$	$y_5 = 1,103\ 550\ 24$	0,055 177 512
$x_6 = 0,6$	$y_6 = 1,158\ 727\ 752$	0,069 523 665
$x_7 = 0,7$	$y_7 = 1,228\ 251\ 417$	0,085 977 599
$x_8 = 0,8$	$y_8 = 1,314\ 229\ 016$	0,105 132 321
$x_9 = 0,9$	$y_9 = 1,419\ 367\ 337$	0,127 743 060
$x_{10} = 1$	$y_{10} = 1,547\ 110\ 397$	

L'équation différentielle $y' = xy$ admet pour solution (équation à variables séparables), en tenant compte des conditions initiales, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. La valeur exacte de cette fonction pour $x = 10$ est $f(10) = e^{0,5} = 1,648\ 721\ 271$. L'erreur résultant du calcul approché est inférieure à 0,101 62.

13 Calculons les valeurs de y prises par la fonction solution, en choisissant la subdivision de pas $h = 0,1$. Le tableau ci-dessous donne les résultats du calcul. La troisième colonne donne la valeur de l'expression $y_{k+1} - y_k = hf(t_k\,;\,y_k)$, c'est-à-dire dans le cas présent $h(t_k + 1 + y_k)$ soit $0,1(t_k + 1 + y_k)$.

t_k	Valeurs approchées y_k^*	$y_k' = f(t_k\,;\,y_k^*)$	hy_k'
0	0	1	0,1
0,1	0,1	1,2	0,12
0,2	0,22	1,42	0,142
0,3	0,362	1,662	0,166
0,4	0,528	1,928	0,193
0,5	0,721	2,221	0,222
0,6	0,943	2,543	0,254
0,7	1,197	2,897	0,290
0,8	1,487	3,287	0,329
0,9	1,816	3,716	0,372
1	2,188		

L'équation différentielle $y' - y = t + 1$ admet pour solution en tenant compte des conditions initiales, $f(t) = 2\mathrm{e}^t - t - 2$ puisque les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^t$, et $t \mapsto -t - 2$ est une solution particulière de $y' - y = t + 1$ puisque $-1 - (-t - 2) = t + 1$.

EXOS Exercices de synthèse

14 **1.** La lecture du tableau des variations de f donne :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b. f est strictement croissante sur $]-1\,;\,1]$.
f est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. f étant strictement croissante sur $]-1\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$, f admet un extremum en $x_0 = 1$, cet extremum est $f(1) = 0$.

d. Sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, f admet un maximum égal à 0 pour $x_0 = 1$, donc, **pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant 0$.**

2. a. Nous avons :
$f_1(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4)$, pour $x \in]-1\ ;+\infty[$
$\boldsymbol{f_1(1) = -\ln 3}$.

b. $f_2(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x \in]-1\ ;+\infty[$, donc $\boldsymbol{f_2(x) > 0}$ pour tout $x > -1$ puisque f_2 est une fonction exponentielle.

c. $f_3(x) = \mathrm{e}^{(-x^2+2x)}$ pour $x \in]-1\ ;+\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{(-x^2+2x)} = \boldsymbol{0},$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0. \end{cases}$$

d. $f(1) = 0$, donc f **ne peut être** f_1 puisque $f_1(1) = -\ln 3$.
$f_2(x) > 0$ pour $x \in]-1\ ;+\infty[$, or $f(1) = 0$, donc f **ne peut être** f_2.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, donc f **ne peut être** f_3 puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$.
f étant l'une des quatre fonctions proposées, il reste : $\boldsymbol{f = f_4}$.

Donc $\boldsymbol{f(x) = \ln \dfrac{2x+2}{x^2+3}}$ **pour** $\boldsymbol{x > -1}$.

15 **1. a.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$,
donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2x$, soit $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

c. Toutes les courbes données satisfont aux conditions fournies par les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 2) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$
$(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 2) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2$.
D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 2)}$.

b. $f'(x)$ s'annule pour la seule valeur $x = \ln 2$ solution de l'équation $\mathrm{e}^x - 2 = 0$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + 1 > 0$.
La courbe $(\mathscr{C}_4)$ ne convient pas, car la fonction correspondante admet une fonction dérivée s'annulant pour 2 valeurs.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

3. a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right) = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Il s'ensuit que **la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.**

b. La courbe $(\mathscr{C}_1)$ ne convient pas puisque la droite asymptote au voisinage de $-\infty$ est la droite D' d'équation $y = -x$.

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) + 2x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$

$$f(x) + 2x = e^x\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right).$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{2}e^x - 1 < 0$, car $e^x < 1$ pour $x < 0$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + 2x < 0$, car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La courbe représentative de f est donc située au-dessous de son asymptote D.

b. En conséquence, la courbe $(\mathscr{C}_3)$ ne convient pas.
En conclusion, **la courbe $(\mathscr{C}_2)$ satisfait aux conditions rencontrées.**

BAC *L'épreuve*

16 **1. a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Il s'ensuit que **la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire $(O\,;\,\vec{i})$) est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.**

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x}(-1 + \ln x) = -\infty$,

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (-1 + \ln x) = -\infty$.

Il s'ensuit que **la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire $(O\,;\vec{j})$) est asymptote à $(\mathscr{C})$.**

c. P_1 est justifiée.

2. a. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(x) - (-1 + \ln x)}{x^2} = \boldsymbol{\dfrac{2 - \ln x}{x^2}}$.

b. Le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ est celui de $2 - \ln x$ c'est-à-dire :
$2 - \ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 2$ c'est-à-dire à $x < e^2$.

x	0		e^2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

f est strictement croissante sur $]0\,;e^2]$ et strictement décroissante sur $[e^2\,;+\infty[$.

c. P_2 est fausse.

3. Tableau de variations de f :

x	0		e^2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

4. a. L'abscisse du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses est tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x = e}$.

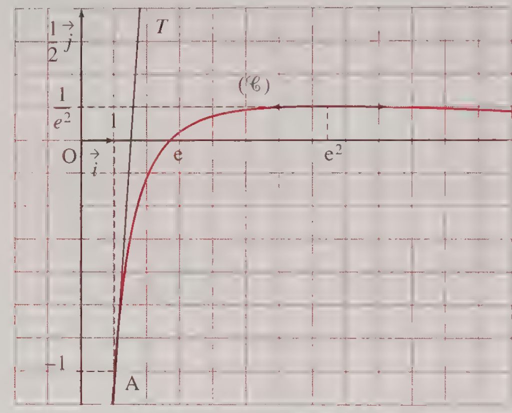
b. À l'aide du tableau de variations de f et du résultat précédent, nous déduisons que :

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

c. P_3 est justifiée.

5. Une équation de T est donnée par $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ avec $f'(1)=2$ et $f(1)=-1$.
Donc une équation de T est $y+1=2(x-1)$, soit $\boldsymbol{y = 2x - 3}$.

6. La courbe représentative de f est donnée ci-après :



17 **A. 1.** La courbe représentative de f' est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left]\frac{1}{e}\,;\,e\right[$ donc, pour tout $x \in \left]\frac{1}{e}\,;\,e\right[$, $f'(x) > 0$.

La courbe représentative de f' est située strictement en dessous de l'axe des abscisses sur $\left]0\,;\,\frac{1}{e}\right[\cup \left]e\,;\,5\right]$ donc, pour tout $\left]0\,;\,\frac{1}{e}\right[\cup \left]e\,;\,5\right]$, $f'(x) < 0$.

D'où le tableau de signes de f' :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		5
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a. Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		5
Variations de f	‖	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	2	↘	

b. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right]$, f est dérivable et strictement croissante avec $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) < 0$ et $f(\mathrm{e}) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **il existe un unique nombre α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$** (on supposera dorénavant que $\alpha = 1$).

c. D'après la question précédente, nous obtenons :

x	$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$\alpha = 1$		e
Signe de $f(x)$	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$-$	0	$+$	2

d. L'aire de la portion de plan définie par $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$ et $0 \leqslant y \leqslant f'(x)$ est donnée en unités d'aire par $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(\mathrm{e}) - f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$,

soit $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f'(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{\mathrm{e}}$ c'est-à-dire 2,74 unités d'aires à 10^{-2} près par excès.

B. 1. Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$ par $g(x) = \ln(1+x)$.

Pour tout x de $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$, nous avons $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $1 + x > 0$ sur cet intervalle, donc $g'(x) > 0$ sur cet intervalle et g est strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$		2
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g	$\ln\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$	$\nearrow$	$\ln 3$

2. a. $h(\mathrm{e}) = g \circ f(\mathrm{e})$, soit $h(\mathrm{e}) = g[f(\mathrm{e})] = g(2)$,
d'où $\boldsymbol{h(\mathrm{e}) = \ln 3}$, soit $\boldsymbol{h(\mathrm{e}) \approx 1{,}09}$.

$h(1) = g \circ f(1)$, soit $h(1) = g[f(1)] = g(0)$
d'où $\boldsymbol{h(1) = 0}$.

$h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = g \circ f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, soit $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = g\left[f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right] = g\left(-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$,
d'où $\boldsymbol{h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) \approx -1{,}33}$.

b. h est la composée de la fonction f strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right]$ par la fonction numérique g strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}}\ ;\ 2\right] = f\left(\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right]\right)$.

Donc h est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right]$.

c. Pour tout x de $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right]$: $h(x) = \ln(1 + f(x))$

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)}.$$

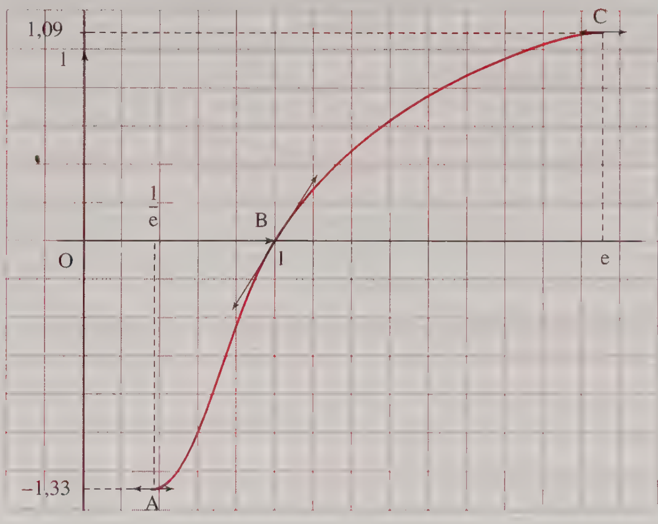
$h'(\mathrm{e}) = \dfrac{f'(\mathrm{e})}{1 + f(\mathrm{e})}$ soit $\boldsymbol{h'(\mathrm{e}) = 0}$.

$h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{1 + f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}$, soit $\boldsymbol{h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0}$.

d.

x	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	1	e
$h(x)$	– 1,33	0	1,09
$h'(x)$	0	1,8	0
Nom du point de $(\mathscr{C})$	A	B	C

Représentation graphique :



18 **A. Étude d'une fonction**

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}} + 2}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est bien définie puisque $e^{\frac{x}{5}} + 2 \neq 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3\left(\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}\right)\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right) - 3e^{\frac{x}{5}}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}\right)}{\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{5}e^{\frac{2x}{5}} + \frac{6}{5}e^{\frac{x}{5}} - \frac{3}{5}e^{\frac{2x}{5}}}{\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right)^2} \quad \text{soit} \quad f'(x) = \frac{\frac{6}{5}e^{\frac{x}{5}}}{\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right)^2}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{5}} > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f :

t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	+
Variations de f	$0 \nearrow 3$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}}(3)}{e^{\frac{x}{5}}\left(1 + 2e^{-\frac{x}{5}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{5}}} = 3.$$

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}} + 2} = 0 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{5}} = 0.$$

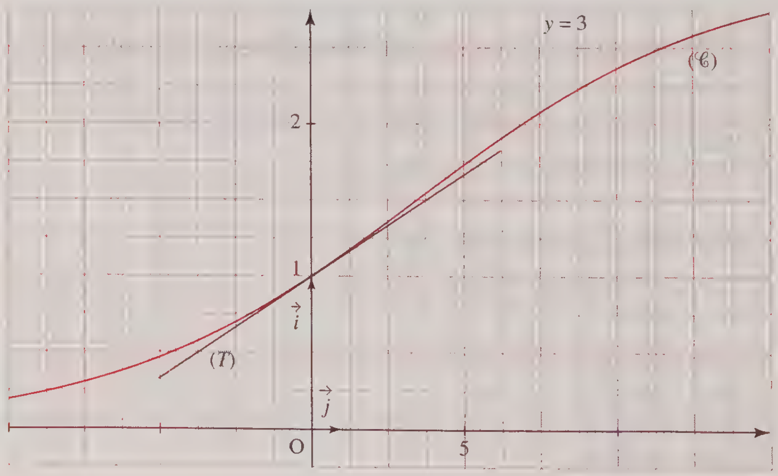
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

2. La tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{2}{15}$.

D'où l'équation de T : $y - 1 = \frac{2}{15}x$ soit $\boldsymbol{T : y = \frac{2}{15}x + 1}$.

3. Représentation graphique :



4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction dérivée de $x \mapsto e^{\frac{x}{5}} + 2$ est $x \mapsto \frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$.

Nous pouvons écrire :

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 15 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{\frac{x}{5}} + 2$ donc $u(x) > 0$.

D'où : $x \mapsto F(x) = 15\ln\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right) + k$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$F(0) = 0$ équivaut à $0 = 15\ln 3 + k$ soit $k = -15\ln 3$.

Sur $\mathbb{R}$, la primitive de f qui s'annule en 0 est :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 15\ln\left(e^{\frac{x}{5}} + 2\right) - 15\ln 3.$$

b. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$ u.a. puisque $f(x) > 0$ sur $[0\,;5]$.

$\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0)$ avec $F(5) = 15\ln(e + 2) - 15\ln 3$

$F(0) = 0$.

$\mathcal{A} = 15\ln(e + 2) - 15\ln 3$ u.a.

B. Étude d'un cas pratique

1. a. Soit l'équation différentielle du premier ordre $g' = \frac{1}{5}g$.

La solution générale d'une telle équation est :

$g(t) = Ae^{\frac{t}{5}}$ où A est une constante réelle.

b. Nous avons : $g(0) = 1$ d'où $1 = Ae^0$ soit $A = 1$

$$g(t) = e^{\frac{t}{5}} \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

c. Déterminons t tel que $g(t) \geqslant 4$.

Cela revient à résoudre l'inéquation : $e^{\frac{t}{5}} \geqslant 4$ pour $t \geqslant 0$,

c'est-à-dire : $\dfrac{t}{5} \geqslant \ln 4$

$t \geqslant 5\ln 4$ avec $5\ln 4 = 10\ln 2$.

À partir de $t = 10\ln 2$ années la population dépassera 4 milliers de poissons puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $(10\ln 2 \approx 7)$.

2. La population de poissons suit en réalité la loi : $g' = \frac{1}{5}g - \frac{g^2}{15}$ (2).

a. Soit $h = \frac{g}{3-g}$ avec $g(t) \neq 3$ pour tout $t \geqslant 0$.

• Si g est solution de (2), puisque $h = \frac{g}{3-g}$ soit $g = \frac{3h}{h+1}$ car $h \neq -1$, nous avons :

$$\left(\frac{3h}{h+1}\right)' = \frac{1}{5} \times \frac{3h}{h+1} - \left(\frac{3h}{h+1}\right)^2 \times \frac{1}{15}$$

$$\frac{3h'(h+1) - 3hh'}{(h+1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{h}{h+1} - \frac{1}{15} \cdot \frac{9h^2}{(h+1)^2}$$

$$3hh' + 3h' - 3hh' = \frac{3}{5}h(h+1) - \frac{1}{15}(9h^2)$$

$$3h' = \frac{3}{5}h^2 + \frac{3}{5}h - \frac{9}{15}h^2$$

$$3h' = \frac{3}{5}h$$

$$h' = \frac{1}{5}h$$ donc h est solution de (1).

• Réciproquement :
si h est solution de (1) on a alors :

$$\left(\frac{g}{3-g}\right)' = \frac{1}{5} \cdot \frac{g}{3-g}$$

$$\frac{g'(3-g) - g(-g')}{(3-g)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{g}{3-g}$$

$$3g' - g'g + gg' = \frac{1}{5}g(3-g)$$

$$3g' = \frac{3}{5}g - \frac{1}{5}g^2$$

$$g' = \frac{1}{5}g - \frac{1}{15}g^2$$ donc g est solution de (1).

En conclusion : **g est solution de (2) si et seulement si h est solution de (1).**

b. g est solution de (2) lorsque h est solution de (1) d'après **b.** donc :

pour $h(t) = \mathrm{A}e^{\frac{t}{5}}$ nous avons $g(t) = \dfrac{3\mathrm{A}e^{\frac{t}{5}}}{\mathrm{A}e^{\frac{t}{5}} + 1}$ car $g = \frac{3h}{h+1}$.

c. $g(0) = 1$ d'où A vérifie : $1 = \dfrac{3A}{A+1}$

$$A + 1 = 3A$$
$$1 = 2A$$
$$\frac{1}{2} = A.$$

Par conséquent : $g(t) = \dfrac{1{,}5e^{\frac{t}{5}}}{0{,}5e^{\frac{t}{5}} + 1}$ pour $t \geqslant 0$.

Multiplions par 2 le numérateur et le dénominateur du quotient précédent.

Cela donne : $\boldsymbol{g(t) = \dfrac{3e^{\frac{t}{5}}}{e^{\frac{t}{5}} + 2}}$ **pour** $\boldsymbol{t \geqslant 0}$**.**

f et g coïncident donc sur $[0\ ;+\infty[$.

d. $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 3$ (d'après **A. 1.**).

La population de poissons tend vers trois milliers.

19 **A.** La dose est injectée par piqûre intraveineuse.

1. L'équation différentielle du premier ordre $Q'(t) = -\lambda Q(t)$ admet pour solution générale $Q(t) = ke^{-\lambda t}$ où k est constante réelle.

À l'instant $t = 0$, nous avons $Q(0) = 1{,}8$.

Donc k doit vérifier $1{,}8 = ke^0$ soit $k = 1{,}8$.

$\boldsymbol{Q(t) = 1{,}8e^{-\lambda t}}$ pour $\boldsymbol{t \geqslant 0}$**.**

Au bout d'une heure la quantité présente dans le sang a diminué de 30 % soit

$Q(1) = 0{,}7Q(0)$

$Q(1) = 0{,}7 \times 1{,}8$

$\boldsymbol{Q(1) = 1{,}26.}$

Or : $Q(1) = 1{,}8e^{-\lambda}$

$$1{,}26 = 1{,}8e^{-\lambda}$$

$$\frac{1{,}26}{1{,}8} = e^{-\lambda} \quad \text{soit} \quad -\lambda = \ln\frac{1{,}26}{1{,}8}$$

$$\lambda = -\ln\frac{1{,}26}{1{,}8} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\lambda = \ln\frac{1{,}8}{1{,}26}}$$

$$\boldsymbol{\lambda \approx 0{,}3567.}$$

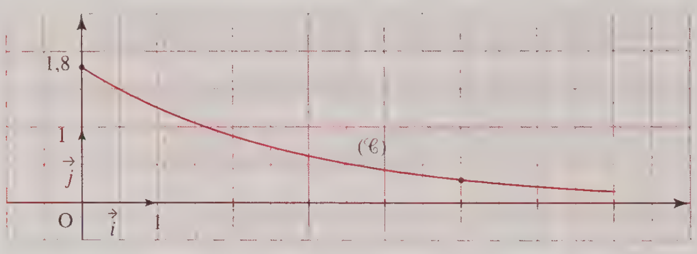
2. Pour $t \geqslant 0$, $Q'(t) = -1{,}8\lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$.
D'où : $Q'(t) < 0$ pour tout $t \geqslant 0$.
La fonction Q est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} 1{,}8e^{-\lambda t} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to +\infty \\ \lambda > 0}} e^{-\lambda t} = 0. \end{cases}$$

Tableau de variations de Q :

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $Q'(x)$	$-$
Variations de Q	$1{,}8 \searrow 0$

Courbe représentative de Q :



3. Nous cherchons t tel que :

$Q(t) = \frac{1}{2}Q(0)$ soit $Q(t) = 0{,}9$.

Or : $Q(t) = 0{,}9$

$1{,}8e^{-\lambda t} = 0{,}9$ avec $\lambda = \ln\frac{1{,}8}{1{,}26}$

$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$

$-\lambda t = -\ln 2$

$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$ soit $t = \frac{\ln 2}{\ln\frac{1{,}8}{1{,}26}}$ d'où $t \approx \mathbf{1{,}94}$.

4. a. À l'instant $t = 1$, la quantité présente dans le sang est celle que l'on vient de réinjecter (1,8) à laquelle il faut ajouter la quantité restante après la première injection soit $0{,}7 \times 1{,}8$ d'après **1.**.
D'où : $\boldsymbol{R_1 = 1{,}8 + 0{,}7 \times 1{,}8}$ soit $\boldsymbol{R_1 = 3{,}06}$.

b. Au bout de 2 heures, la quantité présente dans le sang sera de 1,8 (qui vient d'être réinjectée) à laquelle il faut ajouter la quantité restante R_1 après une diminution de 30 %, car, d'après **1.**, la quantité de substance dans le sang diminue de 30 % chaque heure.

D'où : $\boldsymbol{R_2 = 0{,}7R_1 + 1{,}8}$ soit $\boldsymbol{R_2 = 3{,}942}$.

c. Nous avons sur le modèle précédent.

$$\boldsymbol{R_{n+1} = 1{,}8 + 0{,}7R_n}.$$

d. Montrons ce résultat par récurrence.

- Pour $n = 0$, $R_0 = 1{,}8$ par hypothèse.

Or pour $n = 0$, $6(1-(0{,}7)) = 1{,}8$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

- Supposons pour $k > 0$ que $R_k = 6(1-(0{,}7)^{k+1})$ et démontrons que $R_{k+1} = 6(1-(0{,}7)^{k+2})$.

$R_{k+1} = 1{,}8 + 0{,}7\mathrm{R}_k$ d'après **4. c.**.

Donc :
$$R_{k+1} = 1{,}8 + 0{,}7[6(1-(0{,}7)^{k+1})]$$
$$R_{k+1} = 1{,}8 + 0{,}7[6-6(0{,}7)^{k+1}]$$
$$R_{k+1} = 1{,}8 + 4{,}2 - 6(0{,}7)^{k+2}$$
$$R_{k+1} = 6 - 6(0{,}7)^{k+2} \quad \text{soit} \quad R_{k+1} = 6(1-(0{,}7)^{k+2}).$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = 6(1-(0{,}7)^{n+1})$.

Autre méthode :

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$R_{n+1} = 1{,}8 + 0{,}7R_n$$
$$R_{n+1} - 6 = -4{,}2 + 0{,}7R_n$$
$$R_{n+1} - 6 = 0{,}7(R_n - 6) \quad (1)$$

Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = R_n - 6$ pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après (1), nous avons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = 0{,}7W_n$ donc (W_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $W_0 = 1{,}8 - 6 = -4{,}2$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = -4{,}2(0{,}7)^n$ ou encore $W_n = -6(0{,}7)^{n+1}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$R_n - 6 = -6(0{,}7)^{n+1}$$
$$R_n = 6 - 6(0{,}7)^{n+1}$$
$$R_n = 6(1-(0{,}7)^{n+1}).$$

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 6$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}7)^{n+1} = 0$ $(0 < 0{,}7 < 1)$.

B. Soit $S : \begin{array}{l} [0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto 6{,}6te^{-t}. \end{array}$

1. $S'(t) = 6{,}6\mathrm{e}^{-t} + 6{,}6t(-\mathrm{e}^{-t}) = 6{,}6\mathrm{e}^{-t} - 6{,}6t\mathrm{e}^{-t}$

$S'(t) = 6{,}6\mathrm{e}^{-t}(1-t)$ pour $t \geqslant 0$.

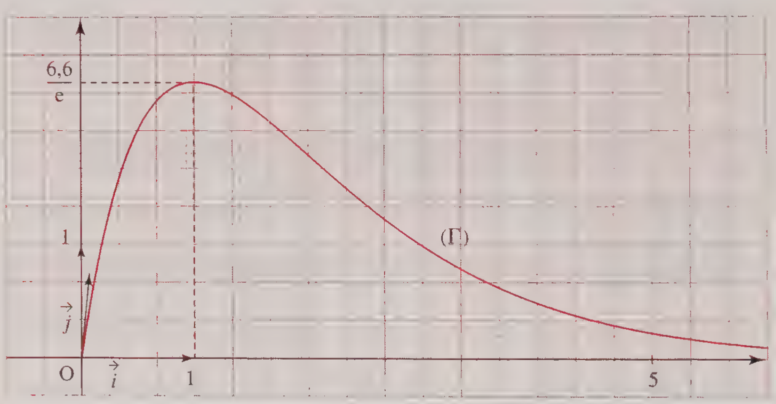
Le signe de $S'(t)$ est celui de $1-t$.

Tableau de variations de S :

t	0		1		$+\infty$
Signe de $S'(t)$	$6{,}6$	$+$	0	$-$	
Variations de S	0	$\nearrow$	$\frac{6{,}6}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{t \to +\infty} (6{,}6t\mathrm{e}^{-t}) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(6{,}6 \times \frac{t}{\mathrm{e}^t}\right) = 0$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

2. Courbe représentative Γ de S :



3. Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, S est continue (car dérivable) et strictement décroissante vers 0 donc il existe un réel τ de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $S(\tau) < 0{,}1$.

Nous avons : $S(5) = 33\mathrm{e}^{-5}$ soit $S(5) \approx 0{,}22$

$S(6) = 39{,}6\mathrm{e}^{-6}$ soit $S(6) \approx 0{,}09$.

D'où : $5 < \tau < 6$.

De plus : $S(5{,}9) \approx 0{,}106$.

En outre, comme $S(5{,}9) > 0{,}1$ et que S est décroissante sur $]1\,;+\infty[$, **5,9 est la valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de τ.**

4 Calcul intégral Aires – Volumes

1 Primitives

1 Définition

La fonction numérique F est une **primitive** de la fonction numérique f sur l'intervalle I,

si F est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

2 Ensemble des primitives d'une fonction

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions définies sur I par :

$$x \mapsto F(x) + k \quad \text{avec } k \text{ un réel.}$$

3 Propriétés des primitives

- Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

- Si F est une primitive de f sur I, alors $\lambda F \ (\lambda \in \mathbb{R})$ est une primitive de λf sur I.

4 Quelques résultats à connaître

Fonction f	Primitives F	Ensemble de définition I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^m,\ m \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$	si $m > 0$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ si $m < 0$ et $m \neq -1$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
$f(x) = u'(x)[u(x)]^m$ $m \neq -1$	$F(x) = \dfrac{[u(x)]^{m+1}}{m+1} + k$	$\mathrm{I} \subset \{x \in \mathbb{R}\,;\, u \text{ dérivable}\}$
$m = -1,\ f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$	$F(x) = \ln(u(x)) + k$	$\mathrm{I} \subset \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$
$f(x) = u(x)u'(x)$	$F(x) = \dfrac{[u(x)]^2}{2} + k$	$\mathrm{I} \subset \{x \in \mathbb{R}\,;\, u \text{ dérivable}\}$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + k$	$\mathrm{I} \subset \{x \in \mathbb{R}\,;\, u \text{ dérivable et } u(x) \neq 0\}$

2 Calcul intégral

1 Définition de l'intégrale

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$:

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a\,,b]$.

On écrit aussi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

- Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors $g'(x) = f(x)$.

- $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Propriétés

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g des fonctions dérivables sur I et a, b et c des éléments de I.

■ **Relation de Chasles**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■ **Linéarité**

Soit $(\alpha\ ,\ \beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ + \ \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

■ **Positivité**

Si $a \leqslant b$ et f positive sur $[a\ ,\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$

■ **Inégalité de la moyenne**

Pour $a \leqslant b$, s'il existe deux réels m et M tels que, sur I, $m \leqslant f \leqslant M$,

alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$

3 Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

4 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions deux fois dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit a et b deux éléments de I :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

■ **Cas particuliers importants**

L'une des deux fonctions est un polynôme.
P désigne cette fonction.

● Pour calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $\displaystyle\int_a^b P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$

avec $0 < a < b$, on pose $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = P(t). \end{cases}$

● Pour calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

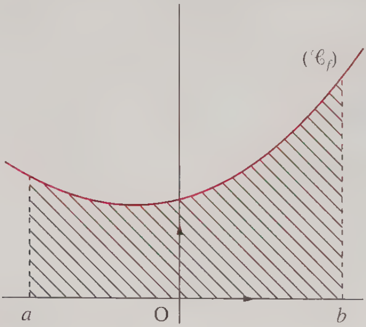
avec $(a\ ,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\begin{cases} u(t) = P(t) \\ v'(t) = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

3 Calcul d'aires

1 Calculs d'aires planes

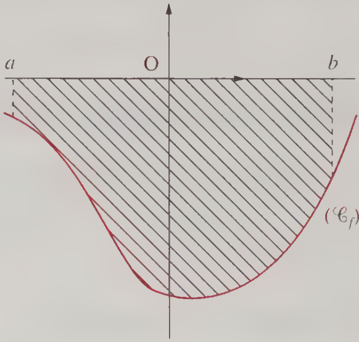
Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire (notées u.a.), de la portion de plan hachurée.

■ f est positive sur $[a\ ;\ b]$



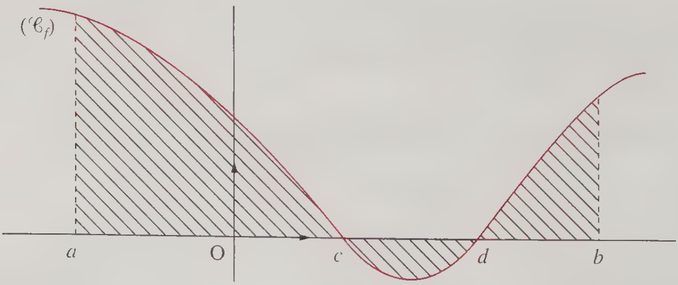
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

■ f est négative sur $[a\ ;\ b]$



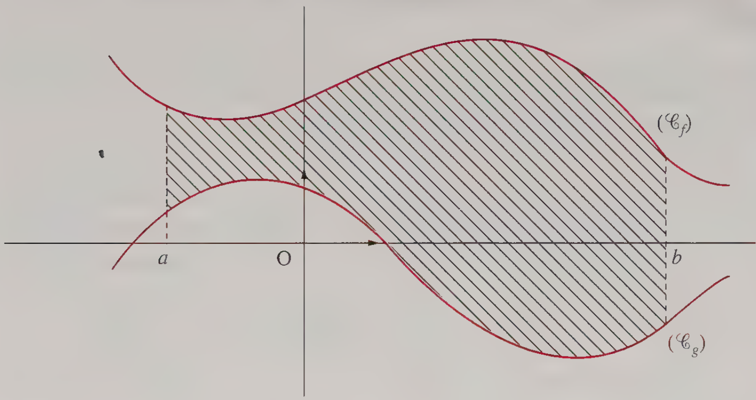
$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

■ f s'annule et change de signe sur $[a\ ;\ b]$



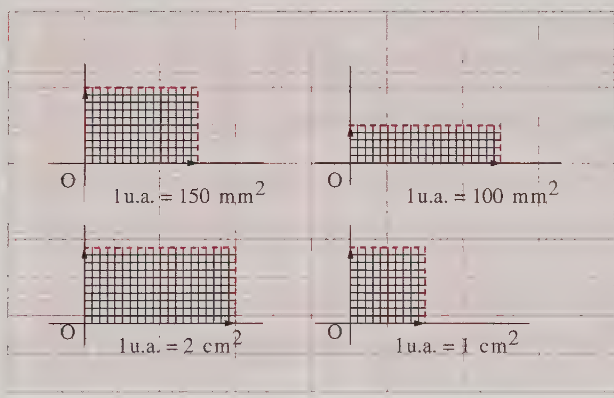
$$\mathscr{A} = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x$$

La portion de plan est comprise entre deux courbes



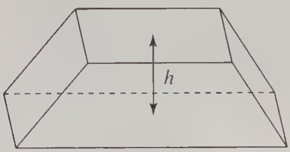
$$\text{Si } f(x) \geqslant g(x) \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \mathscr{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

2 Exemples d'unités d'aires



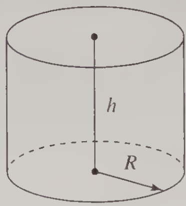
4 Calcul de quelques volumes

Dans ce paragraphe, nous supposerons connu le volume du prisme à base polygonale ainsi que le volume du cylindre de révolution.



$V = \mathcal{A}h$

$\mathcal{A}$ est l'aire du polygone de base



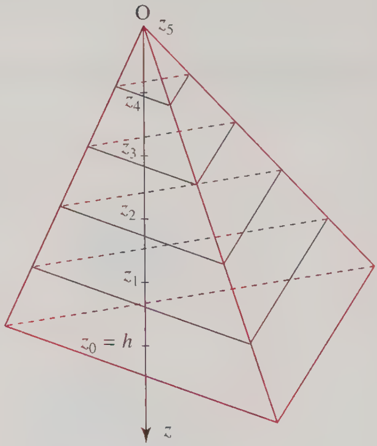
$V = \pi R^2 h$

1 Volume de la pyramide

On coupe la pyramide par des plans équidistants parallèles à la base.

Soient $0 = z_n < z_{n-1} < \ldots < z_1 < z_0 = h$ les cotes de ces plans (h étant la hauteur de la pyramide).

Les intersections de ces plans avec la pyramide sont des polygones homothétiques de la base (les rapports d'homothétie étant $\frac{z_i}{h}$).



Notons que si A′B′C′ est l'image du triangle ABC dans une homothétie de rapport k, nous avons :
$\text{aire}(A'B'C') = k^2 \text{aire}(ABC)$.

En désignant par $\mathcal{A}_i$ l'aire du polygone P_i de cote z_i, on a : $\dfrac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_0} = \dfrac{z_i^2}{h^2}$.

On mène par les sommets du polygone P_i des parallèles à l'une des arêtes de la pyramide (par exemple (OA)). Le prisme, limité par les plans contenant P_i et

P_{i-1} et ayant pour arêtes les droites obtenues, a pour volume :

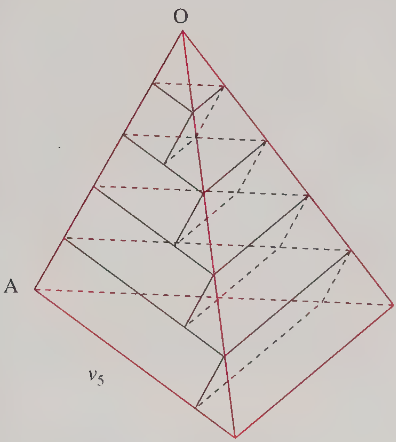
$\mathrm{A}_i(z_i - z_{i-1}) = \dfrac{\mathcal{A}_0}{h^2} z_i^2 (z_i - z_{i-1})$.

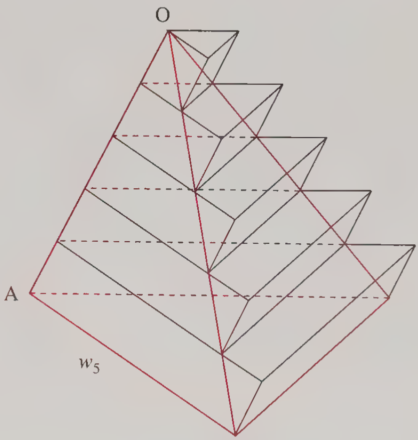
La réunion de ces prismes qui est contenue dans la pyramide a pour volume :

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{A}_0}{h^2} z_i^2 (z_i - z_{i-1}).$$

De même la réunion des prismes limités par les plans contenant P_{i-1} et P_i et ayant pour arêtes les parallèles à (OA) passant par les sommets du polygone P_{i-1} a pour volume :

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{A}_0}{h^2} z_{i-1}^2 (z_i - z_{i-1})$$





Pour tout entier n, le volume V de la pyramide est compris entre v_n et w_n :

$$v_n \leqslant V \leqslant w_n.$$

Dans l'expression de v_n, comme dans celle de w_n, on reconnaît les sommes qui interviennent dans le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^h \frac{\mathcal{A}_0}{h^2} z^2 \mathrm{d}z$ par la méthode des rectangles.

La fonction à intégrer étant monotone sur $[0\,;h]$, la méthode des rectangles fournit deux suites convergentes :

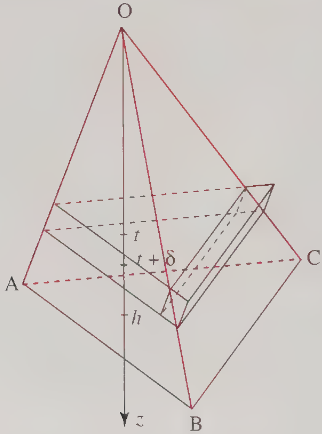
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \int_0^h \frac{\mathcal{A}_0}{h^2} z^2 \mathrm{d}z = \frac{\mathcal{A}_0}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{\mathcal{A}_0 h}{3}.$$

Le volume d'une pyramide dont l'aire de la base est $\mathscr{A}$ et la hauteur h est égal à :

$$\frac{\mathscr{A}h}{3}.$$

Remarque : Il existe une autre méthode pour calculer le volume d'une pyramide.

Soit OABC une pyramide, [Oz) sa hauteur issue de O. Notons $\mathscr{A}(t)$ l'aire du polygone intersection du plan d'équation $z = t$ avec la pyramide et $V(t)$ le volume de la pyramide de sommet O et ayant pour base ce polygone.
Pour tout réel positif δ,
$\delta\mathscr{A}(t) \leqslant V(t+\delta) - V(t) \leqslant \delta\mathscr{A}(t+\delta)$.
On a un encadrement analogue pour $\delta < 0$.
Nous en déduisons que $V'(t) = \mathscr{A}(t)$ et on retrouve alors $V(h)$.



Bien qu'il existe un rapport de 3 entre le volume d'une pyramide et celui du prisme de même base et de même hauteur, il n'est pas possible sauf dans des cas très particuliers de reconstituer le prisme en assemblant trois pyramides identiques.

2 Volume d'une boule

Pour des raisons de symétrie, on se contentera de calculer le volume d'une demi-boule, par exemple, celle limitée par la demi-sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$ et le plan (xOy).

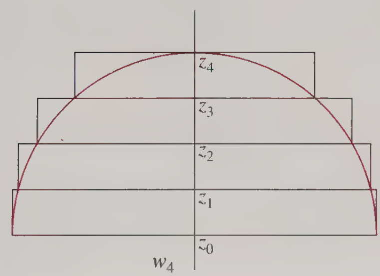
On coupe la boule par les plans d'équations $z = z_i = \frac{iR}{n}$ (i variant de 0 à n).

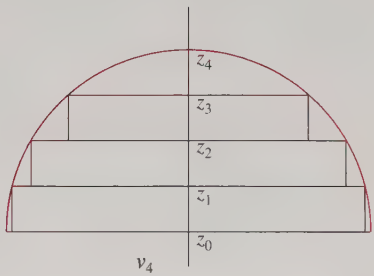
Les intersections de ces plans avec la sphère sont des cercles de rayons respectifs $\sqrt{R^2 - z_i^2}$.

On considère les cylindres ayant pour bases ces cercles et pour hauteur $\frac{R}{n}$.

En notant v_n la somme des volumes des cylindres contenus dans la boule et w_n la somme des volumes des cylindres dont la réunion contient la boule, nous obtenons :

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \pi(R^2 - z_i^2)(z_i - z_{i-1}) \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi(R^2 - z_i^2)(z_{i+1} - z).$$





En raison des inclusions évidentes, le volume V de la demi-boule vérifie pour tout entier n :

$$v_n < V < w_n.$$

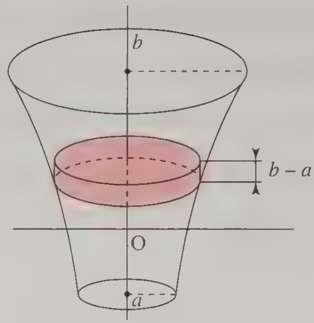
Dans l'expression de v_n et de w_n, on reconnaît à nouveau les sommes qui interviennent dans le calcul de l'intégrale $\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$ par la méthode des rectangles.

La fonction à intégrer étant monotone, la méthode des rectangles fournit deux suites convergentes :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

❸ Volume d'un solide de révolution



Le raisonnement utilisé pour calculer le volume d'une boule se généralise au calcul du volume de tout solide de révolution limité par la surface engendrée par la rotation autour de (Oz) de la courbe d'équation $y = f(z)$ et par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$.

On a dans ce cas :

$$v_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \pi [f(z_i)]^2$$

et si f est monotone, ou de dérivée majorée :

$$V = \lim_{n \to +\infty} v_n = \pi \int_a^b [f(z)]^2 \mathrm{d}z.$$

MÉTHODES

1 Les exercices d'application de ce chapitre sont de trois types :

- **calcul de primitives ;**
- **calcul d'intégrales ;**
- **calcul d'aires planes et de volumes.**

Le troisième type est le plus complet, car il regroupe à la fois les études de fonctions, le calcul d'intégrales et celui de primitives.

- Pour déterminer les primitives d'une fonction numérique donnée sur un intervalle I, il suffit de cibler à chaque étape la formule à appliquer qui est bien souvent du type « $x \mapsto x^n,\ n \neq -1$ », « $x \mapsto u'(x)(u(x))^n,\ n \neq -1$ ».

On ne doit donc pas hésiter ; les cas particuliers $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ relèvent des fonctions logarithmes.

2 Une remarque dont il faut absolument tenir compte

- Seul un calcul d'aire ou de volume s'exprime en unités d'aire ou de volume . Une intégrale est un nombre réel (positif, négatif ou nul), une aire est toujours un nombre positif.

3 À l'aide d'un graphique, on peut toujours s'assurer de la cohérence du résultat

- Il suffit de *compter* le nombre de carreaux de 1 cm^2 contenus dans le domaine dont l'aire est demandée et de *comparer* ce nombre à la valeur, en cm^2, de l'aire qui a été déterminée par le calcul.

4 Avant de calculer une aire à l'aide d'une intégrale

- penser à étudier le signe de la fonction à intégrer sur l'intervalle correspondant.

5 Ne faire une intégration par parties...

que si l'énoncé le demande explicitement.
Toute initiative personnelle à ce sujet est **inutile**.

■ Pour $\int_a^b f(x)\ln x\,\mathrm{d}x$, poser $u(x) = \ln x$, $v'(x) = f(x)$.

■ Pour $\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$, poser $u(x) = f(x)$, $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

Pour déterminer une primitive d'une fonction dérivable on peut :

■ utiliser le tableau des primitives usuelles ;

■ reconnaître que la fonction numérique dont on cherche une primitive est la fonction dérivée d'une fonction connue ;

■ écrire l'expression sous la forme $u'u$ en effectuant une manipulation sur des coefficients ;

■ reconnaître que la primitive est celle d'expression de la forme :

$$uv' + u'v, \quad \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{u'}{u}, \quad u'\mathrm{e}^u\,;$$

■ utiliser une intégration par parties ;

■ linéariser une fonction trigonométrique à l'aide des formules d'Euler.

Pour calculer la valeur exacte d'une intégrale, on peut :

■ utiliser les primitives ;

■ utiliser l'intégration par parties
(dans bien des cas cette méthode est signalée dans l'énoncé) ;

■ utiliser la linéarité d'une intégrale et la relation de Chasles.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** $x \mapsto x^2$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x$.

▶ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

▶ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{8}{9}$.

▶ **4.** $\displaystyle\int_{0}^{3} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\int_{0}^{3} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t\right)^2$.

▶ **5.** L'aire de la portion de plan définie par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant x + \dfrac{1}{x} \end{cases} \text{ est donnée par } \int_{1}^{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

▶ **6.** $\displaystyle\int_{3}^{5} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{6}(\mathrm{e}^{4}-1)$ unités d'aire.

▶ **7.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \ln x\,\mathrm{d}x$ se calcule à l'aide d'une intégration par parties.

2 Réponses

▶ **1.** La phrase proposée est incorrecte.
$x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **2.** La fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur [–1 ; 2], donc $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Le résultat proposé est donc correct.

▶ **3.** Ce résultat est erroné puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle [0 ; 2], car elle n'est pas définie en $x_0 = 1$.

4. Ce résultat est *a priori* faux puisque :

$$\int_a^b f(t)\times f(t)\,\mathrm{d}t \neq \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\times\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

5. La phrase proposée est imprécise. S'agissant d'une aire, le résultat doit être exprimé en unités d'aire soit $\displaystyle\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ u.a.

6. $\displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_3^5$, soit $\displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{10}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6}(\mathrm{e}^{4}-1)$, mais, s'agissant d'une intégrale, le résultat est un nombre réel (sans unité à préciser).

7. $\displaystyle\int_{-1}^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ n'a aucun sens puisque la fonction ln n'est pas définie sur $[-1\,;0]$.

En revanche, $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ se calculerait en intégrant par parties et en posant $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$.

GÉRER SES CONNAISSANCES

Dans les exercices suivants, pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse avec précision.

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3$ et $g(x) = xe^x$. Alors :

a. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x^2e^x$; **b.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{8}{9}$;

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$; **d.** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 1$; **e.** $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 0$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x$.

b. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x\right]_0^1 = -\frac{11}{4}$.

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x\right]_{-1}^1 = -6$.

d. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 1$ en intégrant par parties.

e. $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx = \frac{2}{e}$ en intégrant par parties.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2+1)\sin t\,dt$. Alors :

a. $f(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;

b. $f(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$;

c. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2\displaystyle\int_0^x t\cos t\,dt$;

d. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$;

e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2+1)\sin x$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. f est positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, car la fonction $t \mapsto (t^2+1)\sin t$ est positive sur cet intervalle.

b. Résultat incorrect, car $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \frac{\pi^2}{4} + \pi$ qui est un réel négatif.

c. En intégrant par parties, nous obtenons :

$$f(x) = [-(t^2+1)\cos t]_0^x + 2\int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2\int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t.$$

d. À partir du résultat précédent, en effectuant une nouvelle intégration par parties, nous obtenons :

$$f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2\left[[t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2x\sin x - 2\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$f(x) = 1 - (x^2+1)\cos x + 2x\sin x - 2(-\cos x + 1)$$

soit $\quad f(x) = -1 - (x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x.$

e. Nous retrouvons le résultat annoncé par application directe du cours.

3. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative. Alors :

a. l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$;

b. f est décroissante sur $\mathbb{R}$;

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;

d. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\mathrm{e}^{-x}) = 1$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-\mathrm{e}^{1-x}(1+\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{1-x}(-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\ ;$$

$f(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ et $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e\,e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e}{e^x+1} = e.$

d. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e\,\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -e[\ln(1+e^{-x})]_0^1$ soit $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = e\ln\frac{2e}{1+e}.$

▶4. Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par $I_n = \displaystyle\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.
Alors :

a. pour tout n non nul, on a : $I_n \geqslant 0$;

b. pour tout n non nul, on a : $I_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$;

c. la suite (I_n) est décroissante ;

d. pour tout $n \geqslant 1$, on a : $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \ln(n+2)$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^t}{e^t+1} > 0$ donc, pour tout entier naturel non nul, $I_n \geqslant 0$.

b. Pour tout n non nul :

$I_n = [\ln(e^t+1)]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = \ln(e^{\ln(n+1)}+1) - \ln(e^{\ln n}+1)$

car $\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{x+1} > 0$.

$I_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

c. Pour tout n non nul,

$$I_{n+1} - I_n = \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2}$$

$$I_{n+1} - I_n = \ln\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2+4n+4}\right);$$

or $0 < 1 - \dfrac{1}{n^2+4n+4} < 1$ et $\ln x$ est négatif pour $0 < x < 1$, donc la suite (I_n) est décroissante.

d. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^t+1}\,dt + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t+1}\,dt + \cdots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t+1}\,dt.$$

Donc $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_0^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt = [\ln(e^t + 1)]_0^{\ln(n+1)}$.

Soit : $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \ln(n+2) - \ln 2$.

5. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.

a. Si $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, alors f est positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $I_n = \int_0^e x^2(\ln x)^n\,dx$, alors on a $I_1 = \frac{e^3+1}{9}$.

c. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{e^3-1}{3}$.

d. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Vrai.

Justifications :

a. $\int_{-1}^2 x^3\,dx = \frac{15}{4}$, qui est un réel positif, et pourtant la fonction cube n'est pas positive sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

b. $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx$, à l'aide d'une intégration par parties.

$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$, soit $I_1 = x^2 \ln x\,dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

c. $I_n \leqslant \int_1^e x^2\,dx$ car, pour $x \in [1\,;e]$, nous avons : $0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant 1$ et $\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3-1}{3}$, donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{e^3-1}{3}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e (n+1)x^2(\ln x)^n\,dx$

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{(n+1)}{3}I_n,$$

soit $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

SUJETS Se préparer à l'examen

EXOS Exercices d'application

1 Déterminer les primitives des fonctions numériques suivantes sur l'intervalle I précisé.

a. $f_1 : x \mapsto x^5 + \dfrac{1}{x^2} - 2\sqrt{x}$ $\quad$ $I =]0\,;+\infty[$.

b. $f_2 : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^2}$ $\quad$ $I =]-\infty\,;0[$.

d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{5}{3\sqrt{x^3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$ $\quad$ $I =]0\,;+\infty[$.

2 Déterminer les primitives des fonctions numériques suivantes sur l'intervalle I précisé.

a. $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x^5 - \dfrac{15}{2}x^3 + \dfrac{3}{7}x + \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

b. $f_2(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $I =]0\,;\ +\infty[$.

c. $f_3(x) = (x-2)^2(x+1)$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

d. $f_4(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$ $\quad$ $I =]1\,;\ +\infty[$.

e. $f_5(x) = x^3(x^4+1)^2$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

3 Déterminer les primitives des fonctions numériques suivantes sur l'intervalle I précisé.

a. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{(2-x)^2}$ $\quad$ $I =]-\infty\,;\ -2[$.

b. $f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{(5x-7)^2}$ $\quad$ $I =]2\,;\ +\infty[$.

c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{(3x^2+1)^3}$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(3-x)^2} + \dfrac{2}{(5-2x)^2}$ $\quad$ $I =]-\infty\,;\ 0[$.

4 Déterminer une primitive des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

a. $f_1(x) = \cos^2 x$; $\quad$ **b.** $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad$ **c.** $f_3(x) = 1 + e^{-x}$.

5 Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties :

a. $I_1 = \int_1^2 (x^2 + x)\ln x \, dx$;

b. $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x+1)\ln 2x \, dx$;

c. $I_3 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x+3)e^{2x} \, dx$;

d. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x \, dx$.

6 **1.** Construire, sans étude particulière, dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

2. On se propose de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan (E) définie par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

On considère, pour cela, une subdivision de l'intervalle [1 ; 2] en n intervalles dont les extrémités forment une suite géométrique. Le premier terme de cette suite est donc 1 et le dernier est 2, et, si on appelle q la raison de cette suite géométrique, les termes qui la composent sont $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, q^n = 2$. La raison de cette suite est donc $q = \sqrt[n]{2}$. On considère les deux régions E'_n et E''_n du plan déterminées de la façon suivante :

- E'_n est constituée par la réunion des n rectangles dont les sommets sont les points de coordonnées $(q^p\,;\,0)$, $(q^{p+1}\,;\,0)$, $(q^{p+1}\,;\,f(q^{p+1}))$, $(q^p\,;\,f(q^{p+1}))$, avec $p = 0, 1, \ldots, (n-1)$.
- E''_n est constituée par la réunion des n rectangles dont les sommets sont les points de coordonnées $(q^p\,;\,0)$, $(q^{p+1}\,;\,0)$, $(q^{p+1}\,;\,f(q^p))$, $(q^p\,;\,f(q^p))$, avec $p = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

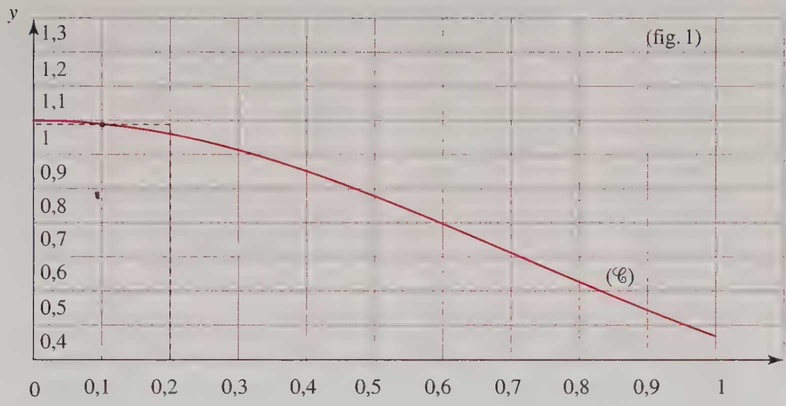
a. Déterminer les aires $\mathscr{A}'_n$ et $\mathscr{A}''_n$ de E'_n et E''_n. En déduire un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ de E.

b. Déterminer les limites quand n tend vers l'infini des suites $(\mathscr{A}'_n)$ et $(\mathscr{A}''_n)$. En déduire la valeur de $\mathscr{A}$. (On admettra que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.)

7 **Calcul approché d'une intégrale**

A. Méthode du point milieu

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = e^{-x^2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. (fig. 1 page suivante)



On se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

1. Que représente sur la figure 1 l'intégrale I ?

2. On divise l'intervalle [0 ; 1] en cinq intervalles de même longueur 0,2.

On considère les cinq rectangles dont la base a pour longueur 0,2 et dont les hauteurs respectives sont : $f(0{,}1)$, $f(0{,}3)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}7)$ et $f(0{,}9)$.

Tracer ces cinq rectangles sur la figure 1.

Le nombre A, somme des aires de ces cinq rectangles, vous semble-t-il représenter une valeur approchée de l'intégrale I ?

3. Calculer les valeurs arrondies à 10^{-4} de :

$f(0{,}1)$	$f(0{,}3)$	$f(0{,}5)$	$f(0{,}7)$	$f(0{,}9)$

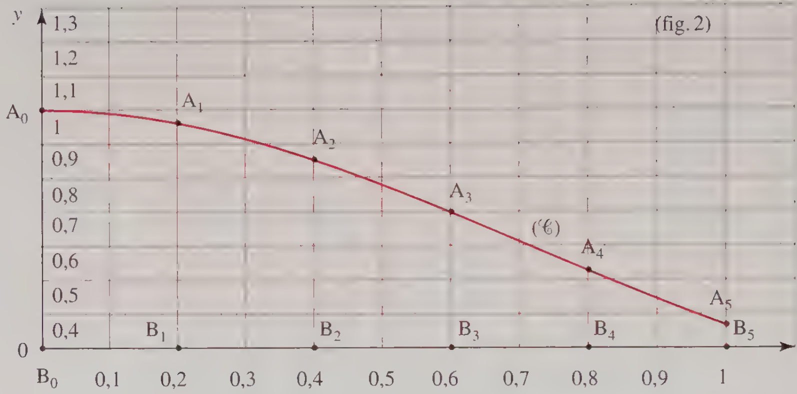
En déduire une valeur approchée de I.

B. Méthode des trapèzes

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = e^{-x^2}$ et (𝒞) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. (fig. 2 page suivante)

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $J = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

1. On divise l'intervalle [0 ; 1] en cinq intervalles de même longueur 0,2.
Tracer la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.



On obtient ainsi 5 trapèzes : $B_0A_0A_1B_1$, $B_1A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, $B_3A_3A_4B_4$, $B_4A_4A_5B_5$.

Le nombre T, somme des aires des cinq trapèzes, vous semble-t-il représenter une valeur approchée de l'intégrale J ?

2. Sachant que l'aire d'un trapèze est $\dfrac{(B+b)\times h}{2}$, montrer que l'on a :

$$T = 0{,}2\left(\frac{f(0)}{2} + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + \frac{f(1)}{2}\right).$$

3. Calculer les valeurs arrondies à 10^{-4} près de :

$f(0{,}2)$	$f(0{,}4)$	$f(0{,}6)$	$f(0{,}8)$	$f(1)$

En déduire une valeur approchée de J.

Exercices de synthèse

8 Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{e^x}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = (-2x^2 - 7x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer avec précision la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

4. Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$

9 On note I l'intervalle [0 ; 1].

1. a. Transformer la somme $1 + x + x^2 + x^3$ pour $x \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, on a $\dfrac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$ (1).

2. a. Étudier les variations de la fonction numérique f définie sur I par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

b. Étudier les variations de la fonction numérique g définie sur I par :

$$g(x) = -1 + x + \mathrm{e}^{-x}.$$

c. Étudier les variations de la fonction numérique h définie sur I par :

$$h(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x}.$$

d. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, on a les inégalités :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (2).$$

3. a. Déduire de (2) un encadrement de e^{-x^2} pour $x \in \mathrm{I}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $1 - x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^4}{2(1+x)}$ (3).

4. À l'aide de (1) et (3), montrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$, et donner une valeur approchée de l'intégrale à $3 \cdot 10^{-2}$ près.

10 **1.** Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ (unité : 1 cm sur chaque axe) construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f : x \mapsto 4\sin\dfrac{x}{2}$ pour x élément de $[0\,;\,2\pi]$.

2. Calculer l'aire, en cm^2, du domaine plan limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.

3. Calculer le volume du solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine plan défini au **2**.

4. Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$: $\cos^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0$.

11 Soit la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}.$$

1. Tracer cette courbe pour $x \in [0\,;1]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 2 cm).

2. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la surface S délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

b. Donner une valeur approchée à 1 mm² près de $\mathscr{A}$.

3. On désigne par V le volume du solide engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses.

a. Donner la valeur exacte de V.

b. Donner une valeur approchée à 1 mm³ près de V.

BAC *L'épreuve*

12 On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien et

$I_0 = \displaystyle\int_1^e x^2\,dx.$

1. Calculer I_0.

2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\quad 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \quad (1)$

En déduire I_2.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.

b. Déduire de (1) que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leqslant \dfrac{e^3}{n+1}$.

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** Pour tout $x > 0$, $f_1(x) = x^5 + x^{-2} - 2x^{\frac{1}{2}}$.

Or une primitive sur $[0\,;+\infty[$ de $x \mapsto x^\alpha$ avec α réel $\neq -1$ est :
$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Donc $F_1(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k_1$, pour $x > 0$ et k_1 constante réelle.

$\boldsymbol{F_1(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + k_1}$, pour $x > 0$ et k_1 réel $\left(x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}\right)$.

b. Pour tout x réel, $f_2(x) = u'(x)[u(x)]^3$, où $u(x) = x^2 + 1$.

Or une primitive de $x \mapsto u'(x)u^n(x)$ pour $x \in \mathrm{I}(\subset \mathcal{D}_f)$ est :

$$x \mapsto \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + k, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}.$$

$F_2(x) = \dfrac{[u(x)]^4}{4} + k_2$, avec $u(x) = x^2 + 1$, pour tout réel x.

Donc $\boldsymbol{F_2(x) = \dfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + k_2}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et k_2 constante réelle.

c. Pour tout $x < 0$, $f_3(x) = \dfrac{x^3}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$.

Donc $\boldsymbol{F_3(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x} + k_3}$, pour tout $x < 0$ et k_3 constante réelle.

d. Pour tout $x > 0$, $f_4(x) = \dfrac{5}{3}x^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$,

car $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$, pour $x > 0$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Or une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Donc $F_4(x) = \dfrac{5}{3}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + k_4$, pour tout $x > 0$ et k_4 constante réelle.

$$F_4(x) = -\frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k_4,$$ pour tout $x > 0$ et k_4 constante réelle.

(En effet, $x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}$, soit $x^{\frac{5}{2}} = x^2\sqrt{x}$ pour $x > 0$.)

2 **a.** $F_1(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^6}{6}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)\frac{x^4}{4} + \left(\frac{3}{7}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C_1$.

$F_1(x) = \frac{x^6}{18} - \frac{15x^4}{8} + \frac{3x^2}{14} + \frac{1}{2}x + C_1$, $x \in \mathbb{R}$, C_1 étant une constante réelle.

b. $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + C_2$, x réel strictement positif, C_2 constante réelle.

c. $f_3(x) = (x^2 - 4x + 4)(x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4$, x réel.

Il est nécessaire de développer, car $f(x)$ ne peut s'écrire sous la forme $u'(x)u^n(x)$.

D'où $F_3(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + C_3$, $x \in \mathbb{R}$, C_3 étant une constante réelle.

d. $f_4(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$, pour $x > 1$

$f_4(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 3$.

D'où $F_4(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+2x-3}\right) + C_4$, $x > 1$.

$F_4(x) = -\frac{1}{2(x^2+2x-3)} + C_4$, $x > 1$, C_4 étant une constante réelle.

e. $f_5(x) = \frac{1}{4}4x^3(x^4+1)^2$

$f_5(x) = \frac{1}{4}u'(x)[u(x)]^2$ avec $u(x) = x^4 + 1$.

D'où $F_5(x) = \frac{1}{4}\frac{[u(x)]^3}{3} + C_5$.

$F_5(x) = \frac{1}{12}(x^4+1)^3 + C_5$, $x \in \mathbb{R}$ et C_5 étant une constante réelle.

3 **a.** Pour $x < 2$, $f_1(x) = (2-x)^{-2} = -(-(2-x)^{-2})$

$f_1(x) = -u'(x)[u(x)]^{-2}$ avec $u(x) = 2-x$.

D'où : $F_1(x) = -\frac{[u(x)]^{-1}}{-1} + k = \frac{1}{2-x} + k$, pour $x < 2$.

b. Pour $x > 2$, $f_2(x) = 3(5x-7)^{-2} = \frac{3}{5}5(5x-7)^{-2}$.

$$f_2(x) = \frac{3}{5}u'(x)[u(x)]^{-2}, \text{ avec } u(x) = 5x-7.$$

D'où : $F_2(x) = \frac{3}{5}\frac{[u(x)]^{-1}}{-1} + k$.

$$\boldsymbol{F_2(x) = -\frac{3}{5}\frac{1}{(5x-7)} + k}, \text{ pour } x > 2.$$

c. Pour tout réel x, $f_3(x) = x(3x^2+1)^{-3} = \frac{1}{6}6x(3x^2+1)^{-3}$

$$f_3(x) = \frac{1}{6}u'(x)[u(x)]^{-3}, \text{ avec } u(x) = 3x^2+1.$$

D'où : $F_3(x) = \frac{1}{6}\frac{[u(x)]^{-2}}{-2} + k$, avec $u(x) = 3x^2+1$.

$$\boldsymbol{F_3(x) = -\frac{1}{12}\frac{1}{(3x^2+1)^2} + k}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

d. Pour $x < 0$, $f_4(x) = -\frac{-1}{(3-x)^2} - \frac{-2}{(5-2x)^2}$.

D'où : $\boldsymbol{F_4(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{5-2x} + k}$, pour $x < 0$.

4 **a.** $f_1(x) = \cos^2 x$, or $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

D'où $\boldsymbol{F_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + k}$, $k \in \mathbb{R}$.

b. $f_2(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$, soit $f_2(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = x^2+1$.

D'où $\boldsymbol{F_2(x) = \sqrt{x^2+1} + k}$.

c. $f_3(x) = 1 + e^{-x}$.

Or, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax}$.

D'où $\boldsymbol{F_3(x) = x - e^{-x} + k}$, $k \in \mathbb{R}$.

5 **a.** Pour $x > 0$, posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 + x, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Nous avons :

$$I_1 = \left[\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \left(\frac{8}{3} + 2\right)\ln 2 - 0 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \frac{14}{3}\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$I_1 = \frac{14}{3}\ln 2 - \left(\frac{8}{9} + 1\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)$$

$$I_1 = \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} - \frac{3}{4}, \text{ soit } \boldsymbol{I_1 = \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{55}{36}}.$$

b. Pour $x > 0$, posons $\begin{cases} u(x) = \ln 2x \\ v'(x) = 2x + 1, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2 + x. \end{cases}$

Nous avons :

$$I_2 = \left[(x^2 + x)\ln 2x\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}(x^2 + x)\mathrm{d}x$$

$$I_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 (x + 1)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$I_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{8}, \text{ soit } \boldsymbol{I_2 = 2\ln 2 - \frac{7}{8}}.$$

c. Posons $\begin{cases} u(x) = x + 3 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{2x}, \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Nous avons :

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}(x + 3)\mathrm{e}^{2x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(3 + \ln 3)\mathrm{e}^{2\ln 3} - \frac{1}{2}(3 + \ln 2)\mathrm{e}^{2\ln 2} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(3+\ln 3)e^{\ln 9} - \frac{1}{2}(3+\ln 2)e^{\ln 4} - \frac{1}{4}e^{2\ln 3} + \frac{1}{4}e^{2\ln 2}$$

$$I_3 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{4}\right)e^{\ln 9} + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)e^{\ln 4}.$$

Or $e^{\ln x} = x$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'où :

$$I_3 = 9\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\ln 3\right) + 4\left(-\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$I_3 = \frac{45}{4} + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{20}{4} - 2\ln 2, \text{ soit } \boldsymbol{I_3 = \frac{25}{4} + \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2.}$$

d. Posons $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x. \end{cases}$

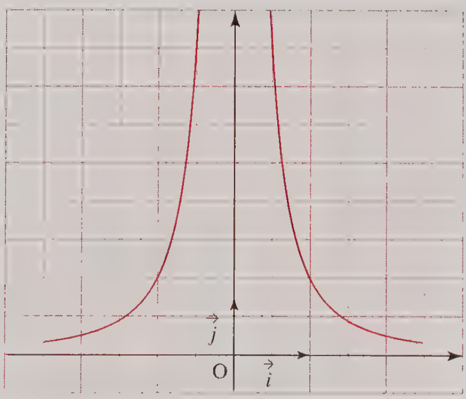
Nous avons : $I_4 = \Big[(x+1)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

$$I_4 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_4 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0$$

$$I_4 = \frac{\pi}{2} + 1 - 1, \text{ soit } \boldsymbol{I_4 = \frac{\pi}{2}}.$$

6 **1.** Courbe représentative :



2. $M_p(q^p\,;\,f(q^p))$

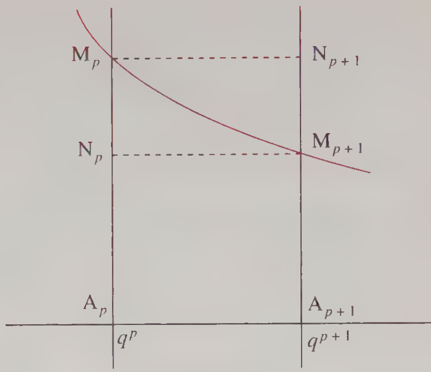
$A_p(q^p\,;\,0)$

$A_{p+1}(q^{p+1}\,;\,0)$

$M_{p+1}(q^{p+1}\,;\,f(q^{p+1}))$

$N_p(q^p\,;\,f(q^{p+1}))$

$N_{p+1}(q^{p+1}\,;\,f(q^p))$.



a. Nous avons : $$\mathcal{A}'_n = \sum_{p=0}^{n-1} (q^{p+1} - q^p) f(q^{p+1})$$

$$\mathcal{A}'_n = \sum_{p=0}^{n-1} q^p (q-1) \frac{1}{(q^{p+1})^2}$$

soit $\mathcal{A}'_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{q-1}{q^{p+2}} = \frac{q-1}{q^2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{q^p}$ mais $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{q^p}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{q}$ (et $\dfrac{1}{q} \neq 1$).

Nous avons alors : $$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{q^p} = \frac{1 - \dfrac{1}{q^n}}{1 - \dfrac{1}{q}}$$

soit $$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{q^p} = \frac{1 - \dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{q}} = \frac{q}{2(q-1)} \quad \text{car } q^n = 2.$$

Nous avons finalement :

$\mathcal{A}'_n = \dfrac{q-1}{q^2} \times \dfrac{q}{2(q-1)}$ soit $\mathcal{A}'_n = \dfrac{1}{2q}$ unités d'aire,

c'est-à-dire $\mathcal{A}'_n = \dfrac{2}{\sqrt[n]{2}}$ **cm²**.

De même : $\mathcal{A}''_n = \sum_{p=0}^{n-1}(q^{p+1}-q^p)f(q^p) = \sum_{p=0}^{n-1} q^p(q-1)\frac{1}{(q^p)^2}$

soit $\mathcal{A}''_n = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{q-1}{q^p} = (q-1)\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{q^p}$

$\mathcal{A}''_n = (q-1)\times\frac{q}{2(q-1)} = \frac{q}{2}$ unités d'aire,

c'est-à-dire $\boldsymbol{\mathcal{A}''_n = 2\sqrt[n]{2}}$ **cm²**.

Nous avons : $E'_n \subset E \subset E''_n$ et alors : $\mathcal{A}'_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}''_n$,

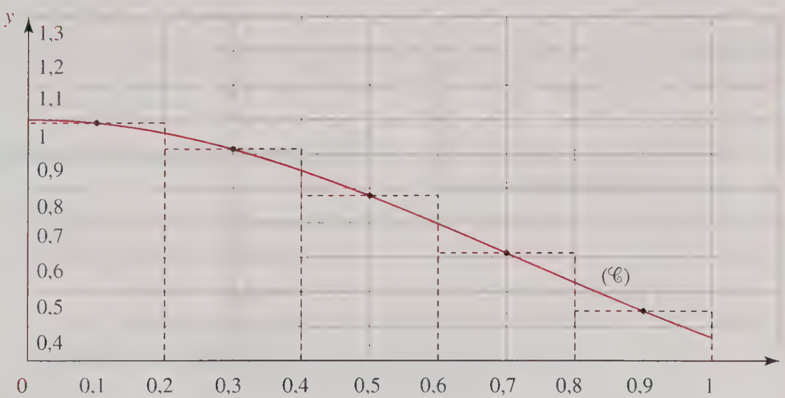
soit en cm² : $\frac{2}{\sqrt[n]{2}} \leqslant \mathcal{A} \leqslant 2\sqrt[n]{2}$.

b. Nous admettons, conformément à l'énoncé, que : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ donc $\boldsymbol{\mathcal{A} = 2}$ **cm²**.

7 A. Méthode du point milieu

1. L'intégrale I représente l'aire en unités d'aire de la portion de plan définie par : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$

2. Tracé des cinq rectangles



Le nombre A représente une valeur approchée de *I*.

3. Valeurs arrondies :

$f(0{,}1)$	$f(0{,}3)$	$f(0{,}5)$	$f(0{,}7)$	$f(0{,}9)$
0,9900	0,9139	0,7788	0,6126	0,4448

La somme des aires des cinq rectangles est donnée par :

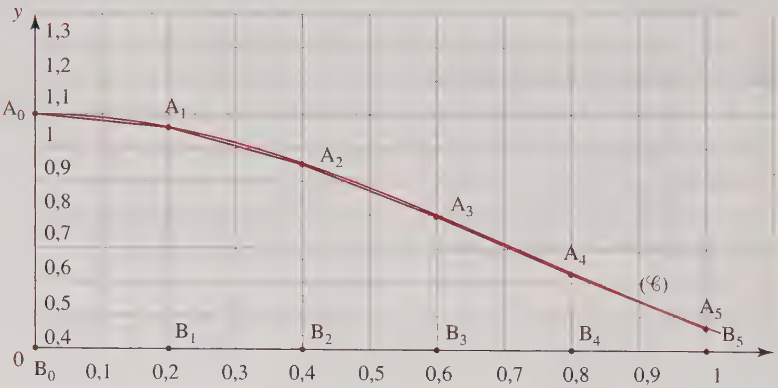
$A = 0{,}2 \times f(0{,}1) + 0{,}2 \times f(0{,}3) + 0{,}2 \times f(0{,}5) + 0{,}2 \times f(0{,}7) + 0{,}2 \times f(0{,}9)$

$A = 0{,}2(f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7) + f(0{,}9))$, soit $A = 0{,}7480$.

Une valeur approchée de *I* est donc 0,7480.

B. Méthode des trapèzes

1. Tracé de la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.



Le nombre *T*, somme des aires des cinq trapèzes, représente une valeur approchée de l'intégrale *J*.

2. Calcul de T :

$$T = \frac{1}{2}(f(0) + f(0{,}2)) \times 0{,}2 + \frac{1}{2}(f(0{,}2) + f(0{,}4)) \times 0{,}2$$
$$+ \frac{1}{2}(f(0{,}4) + f(0{,}6)) \times 0{,}2 + \frac{1}{2}(f(0{,}6) + f(0{,}8)) \times 0{,}2$$
$$+ \frac{1}{2}(f(0{,}8) + f(1)) \times 0{,}2$$

$$T = 0{,}2 \times \left[\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0{,}2) + \frac{1}{2}f(0{,}2) + \frac{1}{2}f(0{,}4) + \frac{1}{2}f(0{,}4) + \frac{1}{2}f(0{,}6) + \frac{1}{2}f(0{,}6) + \frac{1}{2}f(0{,}8) + \frac{1}{2}f(0{,}8) + \frac{1}{2}f(1)\right]$$

d'où $\quad T = 0{,}2 \times \left[\frac{1}{2}f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + \frac{1}{2}f(1)\right].$

3. Valeurs arrondies :

$f(0{,}2)$	$f(0{,}4)$	$f(0{,}6)$	$f(0{,}8)$	$f(1)$
0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678

Une valeur approchée de T donc de J est 0,7443.

EXOS Exercices de synthèse

8 **1.** $f(x)$ s'écrit aussi $(2x^2 + 3x)e^{-x}$.

$f'(x) = (4x + 3)e^{-x} - (2x^2 + 3x)e^{-x} = e^{-x}(-2x^2 + x + 3)$

$f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 3 = -2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$9e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	

• $f(0) = 0. \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$, car $2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}\left(2 + \frac{3}{x}\right) = 0$, car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \text{(croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2. \end{cases}$

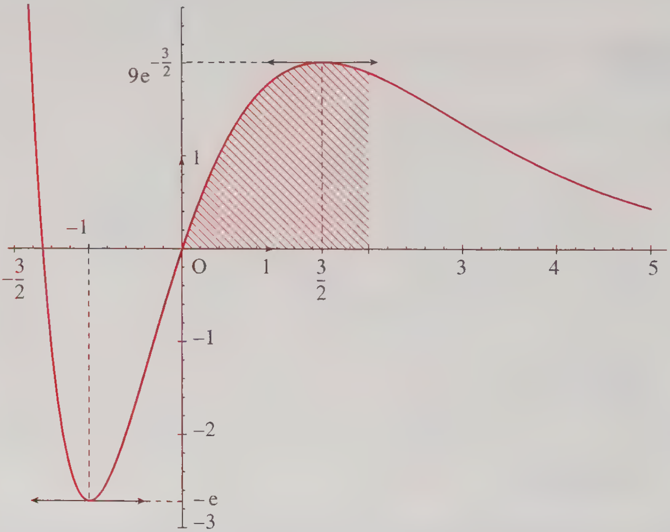
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^2 + 3x)e^{-x} = +\infty$, car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} (2x^2 + 3x) = +\infty. \end{cases}$

2. Pour tout réel x, $F'(x) = (-4x - 7)e^{-x} + (-2x^2 - 7x - 7)(-e^{-x})$

$$F'(x) = e^{-x}(-4x - 7 + 2x^2 + 7x + 7)$$
$$F'(x) = e^{-x}(2x^2 + 3x)$$
$$F'(x) = f(x).$$

***F* est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.**

3. Courbe représentative de f :



4. $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx$ unités d'aire, car f est positive sur $[0\,;2]$.

$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$ avec $F(2) = -29\,e^{-2}$ et $F(0) = -7$.

Donc $\int_0^2 f(x)\,dx = 7 - \frac{29}{e^2}$.

Finalement : $\mathcal{A} = \frac{7e^2 - 29}{e^2}$ **unités d'aire.**

9 **1. a.** Cette somme de quatre termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x s'écrit pour $x \neq 1$:

$$\mathbf{1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}}.$$

b. Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{(x^3 - x^2 + x - 1)(1 + x) + 1}{1 + x}$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^3 + x^4 - x^2 - x^3 + x + x^2 - 1 - x + 1}{1 + x}$$

$$\mathbf{x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^4}{1+x}}.$$

2. a. La fonction numérique f définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ admet pour fonction dérivée f' définie par $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ qui est strictement négative sur I et **f est strictement décroissante sur I.**

b. La fonction numérique g définie sur I par $g(x) = -1 + x + \mathrm{e}^{-x}$ admet pour fonction dérivée g' définie par $g'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Pour x élément de I, nous avons :

$$0 < x < 1$$
$$-1 < -x < 0$$
$$\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^{-x} < 1, \qquad \text{car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R}$$
$$-1 < -\mathrm{e}^{-x} < -\mathrm{e}^{-1}$$
$$0 < 1 - \mathrm{e}^{-x} < 1 - \mathrm{e}^{-1},$$

donc la fonction dérivée est strictement positive sur $]0 ; 1[$ et **g est strictement croissante sur I.**

c. Pour $x \in \mathrm{I}$, $h'(x) = 1 - x - \mathrm{e}^{-x} = -g(x)$, donc $h = -g$ et h est strictement décroissante sur I.

d. g étant croissante sur I, nous en déduisons que $-1 + x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
h étant décroissante sur I, $h(1) \leqslant h(x) \leqslant h(0)$ avec $h(0) = 0$, donc, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $h(x) \leqslant 0$.

Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$-1 + x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

De même, nous avons, pour tout x de I, $g(0) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$, avec $g(0) = 0$, donc nous en déduisons que $g(x) \geqslant 0$.

Il s'ensuit que : $-1+x+\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$

$$1-x \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Finalement, nous avons, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathbf{1-x \leqslant e^{-x} \leqslant 1-x+\frac{x^2}{2}}.$$

3. a. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x^2 \in \mathrm{I}$, donc nous pouvons appliquer le résultat précédent en remplaçant x par x^2 :

$$\mathbf{1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1-x^2+\frac{x^4}{2}}.$$

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $1+x>0$ et alors, nous avons :

$$\frac{1-x^2}{1+x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x} \leqslant \frac{1-x^2+\dfrac{x^4}{2}}{1+x}$$

$$\frac{(1+x)(1-x)}{1+x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x} \leqslant \frac{(1+x)(1-x)}{1+x}+\frac{x^4}{2(1+x)}$$

$$\mathbf{1-x \leqslant \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leqslant 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}}.$$

4. De l'inégalité précédente, nous déduisons que, grâce aux propriétés de l'intégration :

$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}\right]\mathrm{d}x.$$

Or d'après la question **1. b.** : $x^3-x^2+x-1+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^4}{1+x}$

et $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[1-x+\frac{1}{2}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}\right)\right]\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2(1+x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}.$$

Une valeur approchée de l'intégrale à $3 \cdot 10^{-2}$ près est 0,52.

10 **1.** Pour tout $x \in [0\,;2\pi]$, $f'(x) = 2\cos\frac{x}{2}$.

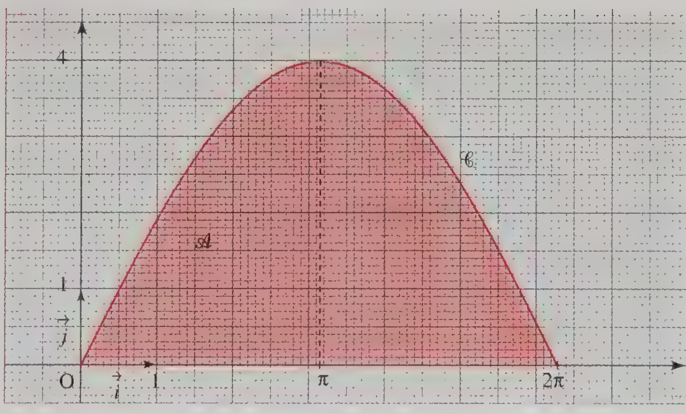
$f'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;\pi[$,

$f'(x) < 0$ pour $x \in]\pi\,;2\pi]$ et $f'(\pi) = 0$.

Tableau de variations de f :

x	0		π		2π
Signe de $f'(x)$	2	+	0	–	–2
Variations de f	0	↗	4	↘	0

Courbe représentative de f :



2. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{2\pi} 4\sin\frac{x}{2}\,dx \times 1\ \text{cm}^2$.

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} 4\sin\frac{x}{2}\,dx = \left[-8\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = (-8\cos\pi) - (-8\cos 0) = 16.$

Donc : $\mathscr{A} = \mathbf{16\ cm^2}$.

3. Nous avons $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \pi[f(x)]^2 dx \times 1\ \text{cm}^3$.

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} \pi \times 16\sin^2\frac{x}{2}\,dx = 16\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx = 8\pi[x - \sin x]_0^{2\pi} = 16\pi^2.$

Donc : $\mathscr{V} = \mathbf{16\pi^2\ cm^3}$.

4. Résolvons l'équation (1) : $\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} + 2 = 0, \quad x \in [0\ ;\ 2\pi]$.

Nous avons $\cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2}$; donc :

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 3 = 0, \quad x \in [0\ ;\ 2\pi]$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2} = T \\ T^2 + 2T - 3 = 0 \\ x \in [0\ ;\ 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2} = T \\ T \in \{1\ ;-3\} \\ x \in [0\ ;\ 2\pi] \end{cases}$$

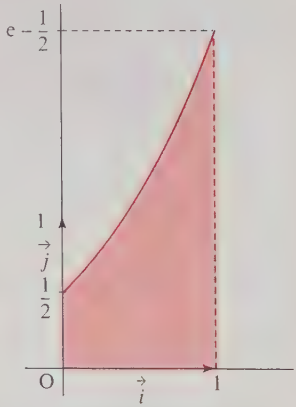
L'équation $\sin\frac{x}{2} = -3$ n'admet pas de solution et $\sin\frac{x}{2} = 1$ équivaut à $x = \pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Or $x \in [0\ ;\ 2\pi]$; donc $\mathcal{S} = \{\pi\}$.

11 **1.** Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f'(x) = e^x$ et f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1] avec $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = e - \frac{1}{2}$.

Tableau de variations

x	0	1
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↗	$e - \frac{1}{2}$



2. a. $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx$ u.a

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{2}\right)dx \text{ u.a} = \left[e^x - \frac{1}{2}x\right]_0^1 \text{ u.a} = \left(\left(e - \frac{1}{2}\right) - (1)\right)\text{u.a}$$

Or 1 u.a $= 4\ \text{cm}^2$; donc $\mathcal{A} = (4e - 6)\ \text{cm}^2$.

b. $\mathcal{A} = 4{,}87\ \text{cm}^2$ à $1\ \text{mm}^2$ près.

3. a. $\mathcal{V} = \int_0^1 \pi (f(x))^2 \mathrm{d}x \times 8 \text{ cm}^2 = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \times 8 \text{ cm}^2.$

Posons $I = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \mathrm{e}^x + \frac{1}{4}x\right)\right]_0^1$

$I = \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$ soit $I = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} + \frac{3}{4}$.

Donc $\mathcal{V} = \pi\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} + \frac{3}{4}\right) \times 8 \text{ cm}^3$ soit $\mathcal{V} = 2\pi(2\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 3) \text{ cm}^2$.

b. $\boldsymbol{\mathcal{V} = 43{,}385 \text{ cm}^3}$ **à 1 mm³ près.**

BAC L'épreuve

12 **1.** Nous avons $I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \mathrm{d}x$, donc $I_0 = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}$

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 1).}$$

2. Calculons $I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \mathrm{d}x$ en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2. \end{cases}$

Dans ce cas, $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$ et $I_1 = [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

D'où : $I_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^3 \ln \mathrm{e} - \frac{1}{3}\ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \mathrm{d}x.$

$I_1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}I_0.$

Ainsi, $I_1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}$, soit $\boldsymbol{I_1 = \frac{1}{9}(2\mathrm{e}^3 + 1).}$

3. Pour tout entier naturel n non nul, nous avons :

$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^{n+1} \mathrm{d}x$ et $I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

avec $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \\ v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^n. \end{cases}$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_0^e x^2(\ln x)^n \mathrm{d}x$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{3}e^3(\ln e)^{n+1} - \frac{1}{3}(\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{3}I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}I_n$$

c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n$

$$\mathbf{3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3.}$$

Ce résultat permet alors d'affirmer que $3I_2 + 2I_1 = e^3$, ce qui signifie que $I_2 = \dfrac{e^3 - 2I_1}{3}$, avec $I_1 = \dfrac{1}{9}(2e^3 + 1)$.

Ainsi, nous avons : $I_2 = \dfrac{e^3 - \frac{2}{9}(2e^3 + 1)}{3} = \dfrac{\frac{1}{9}(5e^3 - 2)}{3}$

$$\mathbf{I_2 = \frac{1}{27}(5e^3 - 2).}$$

4. a. La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$, donc $\ln x \geqslant 0$ pour tout $x \in [1\,;e]$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1\,;e]$, nous avons $(\ln x)^n \geqslant 0$.

Puisque $x^2 \geqslant 0$, pour $x \in [1\,;e]$, on peut en déduire que $x^2(\ln x)^n \geqslant 0$, pour tout $x \in [1\,;e]$.

I_n est donc l'intégrale d'une fonction positive sur $[1\,;e]$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geqslant 0$.**

b. Nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$, c'est-à-dire que $(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3I_{n+1} \geqslant 0$, donc $(n+1)I_n \leqslant e^3$, soit :

$$I_n \leqslant \frac{e^3}{n+1} \textbf{ pour tout entier naturel } n \textbf{ non nul.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e^3}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$, donc :

$$\mathbf{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

5 Probabilités

1 Cardinal d'un ensemble

E est un ensemble fini de *cardinal* n si, et seulement si, il existe une bijection φ de E sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2 Propriétés des cardinaux

Quels que soient les ensembles finis E et F, on a :

$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card }(E \cap F)$.

$\text{Card}(E \times F) = (\text{Card } E) \times (\text{Card } F)$.

Si $\text{Card } E = n$, alors $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

$\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

3 Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\boldsymbol{n^p}$.

4 Permutations

Le nombre de *bijections*, ou de *permutations*, de E sur E avec $\text{Card } E = n$ est $\boldsymbol{n\,!}$

5 Combinaisons

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments $(0 \leqslant p \leqslant n)$ est :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

6 Probabilité

Étant donné un ensemble fini Ω, on appelle probabilité définie sur Ω toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \geqslant 0$;
- $P(\Omega) = 1$ (Ω événement certain) ;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pour A et B sous-ensembles disjoints de Ω,

(A et B sont dits événements incompatibles.)

7 Propriétés des probabilités

■ Soit A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$

- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ($\overline{A}$ événement contraire de A).
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$:
  $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.
- Lorsque $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituent une partition de E :
  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$.

■ Dans la pratique, une probabilité est déterminée sur $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_n\}$ par la donnée de n réels $P_i = P(e_i)$ tous positifs ou nuls et dont la somme est égale à 1.

■ *Cas particulier :* Il y a équiprobabilité lorsque :

$$P(e_1) = P(e_i) = \ldots = P(e_n) = \frac{1}{\text{Card }\Omega} = \frac{1}{n} \text{ si Card } \Omega = n.$$

Tout événement $A(\subset \Omega)$ comportant k éventualités e_i a pour probabilité :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Card A}}{\text{Card }\Omega}.$$

8 Axiome des probabilités conditionnelles, événements indépendants

Étant donné l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(A)$ est définie par $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P_B(A)$ est aussi noté $P(A/B)$.

Cette relation sera souvent utilisée sous la forme $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.
On dit que A et B sont deux événements indépendants si $P_B(A) = P(A)$ (et par conséquent lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).

9 Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle suite de n épreuves de Bernoulli l'épreuve qui consiste à répéter n fois une expérience ayant deux issues possibles sous l'hypothèse d'indépendance de ces n répétitions.

Propriété

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli avec, pour chaque épreuve, la probabilité p d'un succès et $q = 1 - p$ d'un échec.
La probabilité P_k d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves (donc $n - k$ échecs) est :

$$P_k = \binom{n}{p} p^k q^{n-k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

10 Lois numériques

Définition

Soit Ω l'univers des possibles associés à une épreuve aléatoire $\mathscr{E}$. On appelle loi numérique associée à $\mathscr{E}$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une loi numérique X définie sur l'univers fini Ω, muni de la probabilité P, est l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $[0 ; 1]$ telle que : $\varphi(x) = P(X = x)$.

Fonction de répartition

La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Valeurs typiques d'une loi numérique

X étant une loi numérique définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, où $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X et $P_i = P(X = x_i)$, on a alors :

- espérance mathématique de X : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \overline{X}$

(X est dite loi centrée si, et seulement si, $E(X) = 0$) ;

- variance de X : $V(X) = E[(X - \overline{X})^2] = E(X^2) - (E(X))^2$;

- écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$;
- pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $E(aX+b) = aE(X) + b$;
- pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $V(aX+b) = a^2V(X)$.

11 Lois continues de densité

■ Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, en dehors duquel elle est nulle, est dite **densité de probabilité** si :

- $f(t) \geqslant 0$ pour tout réel t ;
- la limite lorsque a et b tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

existe et est égale à 1. En interprétant graphiquement le nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne des valeurs dans $[a\,;b]$ représente l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

■ Soit X une loi numérique qui prend ses valeurs dans un intervalle $[a\,;+\infty[$ ou dans un intervalle $[a\,;b]$ et F sa fonction de répartition.
On dira que X est une loi numérique continue (ou « à densité ») s'il existe une fonction densité f nulle en dehors de $[a\,;+\infty[$ ou en dehors de $[a\,;b]$ et telle que :

$$\text{pour tout } x > a, \quad F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors F est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0\,; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Conséquences : • Quels que soient les réels c et d tels que $a \leqslant c < d$

$$\mathrm{P}(c < X \leqslant d) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$$

• Quel que soit le réel c, $\mathrm{P}(X = c) = 0$.

■ Soit X une loi numérique continue de densité de probabilité f définie sur un intervalle $[a\,;b]$ (cas où f est nulle en dehors de cet intervalle), **l'espérance mathématique** $E(X)$ est donnée par $\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$.

MÉTHODES

■ Avant d'aborder un exercice de probabilité, faire une lecture *très rigoureuse* du texte de manière à ne pas laisser de doutes sur les interprétations possibles. Chaque mot utilisé a un sens bien précis.

■ Se poser la question : est-on ou non dans le cas où s'applique l'hypothèse d'équiprobabilité ? Les événements que l'on considère sont-ils incompatibles ? Indépendants ?

■ Il y a un nombre réduit de résultats à connaître parfaitement et à appliquer à bon escient :
– se rappeler à tout instant que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 ;
– vérifier la cohérence du résultat. Si le résultat trouvé est supérieur à 1, la réponse est fausse ;
– ne pas oublier que si le résultat trouvé est 0, cela veut dire que l'événement considéré ne se réalise jamais ; si c'est 1, cela veut dire qu'il est toujours réalisé.

■ Ne pas confondre événements *contraires* et événements *opposés* ou *inverses*. On passe de la formulation de l'événement A à celui de $\overline{A}$ en utilisant la négation *ne… pas*. Si la formule d'un événement comprend la locution… *au moins un*, il est très souvent utile de considérer l'événement contraire qui s'exprimera par … *aucun*…

■ Pour décrire une expérience aléatoire (notamment avec des probabilités conditionnelles), il peut être utile de construire un diagramme ou un arbre probabiliste. Il est préférable d'utiliser la notion $P_B(A)$ pour $P(A / B)$, car elle met en évidence le fait que P_B est une probabilité différente de P.

I Comment dénombrer

Il faut d'abord se ramener à un modèle connu (souvent celui des tirages).

■ Cas des tirages simultanés de p objets pris parmi n :
on ne peut pas obtenir plusieurs fois le même élément, l'ordre n'intervient pas.
En conclusion : on utilise les combinaisons, soit $\binom{n}{p}$.

■ Cas des tirages successifs *sans* remise de p objets parmi n :
on ne peut pas obtenir plusieurs fois le même élément, l'ordre intervient.
En conclusion : le nombre de tirages est $n(n-1)\ldots(n-p+1)$

■ Cas des tirages successifs *avec* remise de p objets parmi n :
Un même élément peut être obtenu plusieurs fois, l'ordre intervient.

En conclusion : on utilise le nombre d'applications d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments, ou aussi le nombre de p-uplets d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, soit n^p.

Utile

Lorsque l'ensemble E est défini en utilisant « au moins », il est souvent plus simple de dénombrer le complémentaire $\bar{E}$ de E.

Pour résoudre un exercice de probabilités

- Décrire l'univers Ω, puis nommer les événements dont on va avoir à calculer la probabilité (respecter l'énoncé si les événements sont déjà nommés).
- Savoir s'il y a équiprobabilité ou non.

En cas d'équiprobabilité, utiliser le résultat $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

- Lorsque l'événement A se décompose en $A_1 \cup A_2$, on a :

$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ lorsque A_1 et A_2 sont incompatibles ;

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ sinon.

- Lorsque l'événement A se décompose en $A_1 \cap A_2$, on a :

$P(A) = P(A_1) \times P(A_2)$ lorsque A_1 et A_2 sont indépendants ;

$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$ ou $P(A_2) \times P_{A_2}(A_1)$ sinon.

- Cas d'un processus de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli correspond à une variable aléatoire ayant deux issues possibles contraires l'une de l'autre, A et $\bar{A}$.

Un schéma de Bernoulli est une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

C.T.

Les phrases ou résultats suivants sont-ils vrais ? Justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** Dans une urne il y a 6 boules rouges et 2 boules blanches.
On tire simultanément 2 boules.
Le nombre de tirages possibles est 8 !
La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{15}{28}$.

▶ **2.** Le nombre de permutations des lettres du mot EXAMEN est $\binom{6}{4}$.

▶ **3.** $\binom{7}{5}$ est égal à $\binom{7}{2}$.

▶ **4.** Si A inclus dans B, alors $P_B(A) = 1$.

▶ **5.** Si A et B sont disjoints, alors $P_B(A) = 0$.

▶ **6.** Pour A et B événements de probabilités non nulles :

$$P(A) = P_B(A) + P_{\bar{B}}(A).$$

▶ **7.** Deux événements indépendants sont incompatibles.

▶ **8.** Le nombre de tirages possibles de 4 boules simultanément dans une urne contenant 20 boules est $\binom{20}{4}$.

▶ **9.** Si une loi numérique X est associée à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\overset{n}{7}, \overset{p}{\frac{1}{3}}\right)$, alors $E(X) = \frac{7}{3}$ et $V(X) = 7 \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

▶ **10.** A et B désignant deux événements d'un espace probabilisé tels que $P(B) = 0{,}2$, $P_B(A) = 0{,}6$ et $P_{\bar{B}}(A) = 0{,}5$ alors :

a. $P(A \cap B) = 0{,}2$

b. $P_B(\bar{A}) = 0{,}4$

c. $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}48$.

▶ **11.** Une classe de 30 élèves est constituée de 5 filles et 25 garçons.
On suppose que 80 % des filles sont reçues à un examen et 60 % des garçons. On choisit un élève au hasard :
a. la probabilité que cet élève soit un garçon reçu est 0,634 ;
b. la probabilité que cet élève soit reçu est 0,63.

▶ 12. Il peut exister une loi numérique X ne prenant que les valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

▶ 13. Dans une urne, il y a 2 boules blanches, 3 boules noires, 4 boules vertes et 4 boules rouges. On tire au hasard 2 boules simultanément.
La probabilité d'avoir 2 boules de même couleur est :

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{16}{4!}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{8}{39}$ **e.** $\frac{4\times 2!}{4!}$

▶ 14. On tire au hasard une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, avec $N \geqslant 2$. On note X la loi numérique prenant pour valeur le numéro de la boule tirée. Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de X.

a. $E(X) = 1$; **b.** $E(X) = \frac{N+1}{2}$; **c.** $E(X) = N+1$; **d.** $E(X) = \frac{1}{N}$.
e. $E(X)$ prend une autre valeur.

▶ 15. Soit X la loi numérique de loi de probabilité :

x_i	1	a	b
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

avec $a \leqslant b$

On note $E(X)$ l'espérance mathématique de X et $V(X)$ sa variance.
Les réels a et b tels que $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$ sont :
a. $a = 1$ et $b = 3$;
b. $a = -3$ et $b = 1$;
c. $a = -1$ et $b = 3$;
d. $a = -2$ et $b = 4$;
e. $a = 1$ et $b = 1$.

▶ 16. L'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ est un univers sur lequel on définit une probabilité P.

a. Si $P(\{a, b, c\}) = \frac{3}{5}$ et $P(\{a, d, e\}) = \frac{9}{20}$, alors $P(\{a, e\}) \geqslant \frac{1}{20}$.

On suppose, pour les questions **b.** et **c.**, que A et B sont deux événements de E tels que :

$$P(A) = \frac{2}{3},\ P(B) = \frac{3}{5} \text{ et } P(A \cap \overline{B}) = \frac{4}{15}.$$

où $\overline{B}$ désigne l'événement contraire de B.

b. On a $P(A \cup B) = \frac{13}{15}$.

c. Les événements A et B sont indépendants.

d. Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, portant les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e* respectivement.

On effectue 5 tirages successifs d'une boule avec remise. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

La probabilité de tirer exactement 2 fois une voyelle est $q = \dfrac{2^2 \times 3^3}{5^5}$.

▶ **17.** Sachant que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, et $P(A \text{ et } B) = 0{,}15$, $P_B(A)$ vaut :

a. 0,65 ; **b.** 0,30 ; **c.** 0,50 ; **d.** 0,15.

▶ **18.** Les événements précédents sont :

a. exclusifs ; **b.** indépendants ; **c.** ni l'un ni l'autre.

▶ **19.** Sachant que $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}6$ et que A et B sont indépendants, $P(A \cup B)$ vaut :

a. 0,60 ; **b.** 0,10 ; **c.** 0,06 ; **d.** 0,64.

▶ **20.** Il revient au même de dire que deux événements sont exclusifs ou qu'ils sont indépendants.

▶ **21.** Deux événements indépendants sont forcément exclusifs.

▶ **22.** Sachant que $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}9$, avec A et B indépendants, $P_B(A)$ vaut :

a. 0,90 ; **b.** 0,45 ; **c.** 0,50 ; **d.** 0,95.

▶ **23.** Le calcul de $P_B(A)$ peut s'effectuer en faisant appel aux théorèmes des probabilités… :

a. composées ; **b.** conditionnelles ; **c.** totales.

▶ **24.** Sachant que $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}8$, avec A et B indépendants, $P_B(A)$ vaut :

a. 0,90 ; **b.** 0,40 ; **c.** 0,50 ; **d.** 0,80 ; **e.** 1,30.

2 Réponses

▶ **1.** Il s'agit d'un tirage non ordonné de 2 boules parmi 8.

Le nombre de tirages possibles est $\dbinom{8}{2} = 28$. La réponse fournie est fausse.

La probabilité de tirer deux boules rouges (cas d'équiprobabilité) est :

$\dfrac{\dbinom{6}{2}}{\dbinom{8}{2}} = \dfrac{15}{28}$. La réponse fournie est vraie.

2. Le nombre de permutations des éléments d'un ensemble à n éléments est n ! Les lettres distinctes du mot EXAMEN sont au nombre de 5, la lettre E apparaît deux fois. Le nombre de permutations des lettres du mot EXAMEN est $\frac{6!}{2!}$; donc la réponse fournie est fausse.

3. $\binom{n}{p}$ est égal à $\binom{n-p}{p}$ pour $0 \leqslant n \leqslant p$. Donc $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$.
Le nombre de sous-ensembles à 5 éléments d'un ensemble à 7 éléments est le même que celui des sous-ensembles à 2 éléments. En effet, tout sous-ensemble de 5 éléments se constitue complémentairement à un ensemble à $7-5=2$ éléments.

4. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, et si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ $(P(B) \neq 0)$.

Il s'ensuit que $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ lorsque $A \subset B$. La réponse fournie est fausse.

5. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, et si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cap B) = 0$ et par suite $P_B(A) = 0$. La réponse fournie est correcte.

6. $A = A \cap \Omega$ où Ω désigne un événement certain.
$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ avec $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ incompatibles.
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ ou encore
$P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$.
La réponse donnée est fausse.

7. Soit A et B deux événements indépendants, de probabilités non nulles, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Soit A et B deux événements incompatibles, nous avons alors $P(A \cap B) = 0$.
Deux événements indépendants, de probabilités non nulles, ne sont pas incompatibles.

8. La réponse est correcte (voir le corrigé de la question **1.**).

9. Soit $X = \mathcal{B}(n\,;\,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Donc, pour $X = \mathcal{B}\left(7\,;\,\frac{1}{3}\right)$, on a $E(X) = \frac{7}{3}$, mais $V(X) = 7\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}$.

10. **a.** $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}6$ d'où $P(A \cap B) = 0{,}12$ et la réponse fournie est fausse.

b. $B = B \cap (A \cup \bar{A})$, soit $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$.

D'où $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, car $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles.

Soit : $0{,}2 = 0{,}12 + P(\bar{A} \cap B)$

$0{,}08 = P(\bar{A} \cap B)$ et $P_B(\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$.

La réponse fournie est correcte.

c. $P(A \cap \bar{B}) = P_{\bar{B}}(A) \times P(\bar{B})$.

$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}6 \times (1 - 0{,}2)$

$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}48$. La réponse fournie est correcte.

▶ 11. Un tableau permet de conclure rapidement.

	filles	garçons	totaux
reçus	4	15	19
non reçus	1	10	11
totaux	5	25	30

a. Un élève interrogé au hasard est un garçon reçu avec la probabilité $\dfrac{15}{30} = 0{,}5$. La réponse fournie est fausse.

b. Un élève interrogé au hasard est reçu avec la probabilité $\dfrac{19}{30} \approx 0{,}63$.

La réponse fournie est correcte dans son approximation.

▶ 12. La loi numérique X ne prenant que les valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$ on doit avoir :

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$ ce qui est faux ici.

▶ 13. **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Vrai ; **e.** Faux.

▶ 14. **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Faux : $E(X) = \dfrac{N+1}{2}$.

▶ 15. **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Vrai ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ 16. **a.** Vrai ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai ; **d.** Faux.

▶ 17. La réponse **c.** est correcte.

▶ 18. La réponse **b.** est correcte.

▶ 19. La réponse **d.** est correcte.

▶ 20. Faux.

▶ 21. Faux.

▶ 22. La réponse **c.** est correcte.

▶ 23. La réponse **b.** est correcte.

▶ 24. La réponse **b.** est correcte.

1. Le coefficient de x^3y^3 dans le développement de $(1+x)^6(1+y)^6$ est :

a. 20 ; **b.** 36; **c.** 160 000; **d.** 400; **e.** 800.

Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.

Justifications :

Le monôme x^3y^3 est obtenu à partir du produit du monôme en x^3 dans le développement de $(1+x)^6$, dont le coefficient est $\binom{6}{3}=20$, et du monôme en y^3 dans le développement de $(1+y)^6$, dont le coefficient est $\binom{6}{3}=20$. Le coefficient cherché est donc $20 \times 20 = 400$.

2. Soit l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on a :

a. le nombre de sous-ensembles de X est 2^5 ;

b. le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 2 éléments est 20 ;

c. le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 4 éléments est 16 ;

d. le nombre de sous-ensembles de X contenant l'élément 1 est 2^4 ;

e. le nombre de sous-ensembles de X contenant les éléments 2 et 3 est 8.

Réponses : a. Vrai ; b. Faux ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.

Justifications :

a. Nous savons que le nombre de sous-ensemble d'un ensemble à n éléments est 2^n, donc la réponse est correcte.

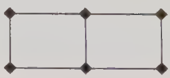
b. Le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 2 éléments est $\binom{5}{2}=10$, donc la réponse est fausse.

c. Le nombre de sous-ensembles de X ayant exactement 4 éléments est $\binom{5}{4}=5$, donc la réponse est fausse.

d. Tout sous-ensemble de X contenant 1 est constitué par ailleurs des éléments de $\{2, 3, 4, 5\}$, il y aura autant de sous-ensembles de X contenant 1 que de sous-ensembles de $Y = \{2, 3, 4, 5\}$, soit $2^4 = 16$. La réponse est vraie.

e. Tout sous-ensemble de X contenant les éléments 2 et 3 est constitué par ailleurs d'éléments de $\{1, 4, 5\}$ il y aura donc autant de sous-ensembles de X contenant 2 et 3 que de sous-ensembles de $Z = \{1, 4, 5\}$, soit $2^3 = 8$; donc la réponse est correcte.

3. Un caractère de l'écriture Braille est formé de points obtenus en piquant une feuille à travers au moins l'un des six trous de la grille ci-dessous :



Il y a alors exactement :
a. 6 caractères Braille formés avec 5 trous ;
b. 15 caractères Braille formés avec 4 trous ;
c. 6 caractères Braille formés avec 3 trous ;
d. $2^6 - 1$ caractères Braille ;
e. $6!$ caractères Braille.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Il y aura autant de caractères Braille formés avec 5 trous qu'il y a de choix de 5 trous parmi les 6 soit $\binom{6}{5} = 6$ donc la réponse est vraie.

b. Il y aura autant de caractères Braille formés avec 4 trous qu'il y a de choix de 4 trous parmi les 6 soit $\binom{6}{4} = 15$ donc la réponse est correcte.

c. Il y aura autant de caractères Braille formés avec 3 trous qu'il y a de choix de 3 trous parmi les 6 soit $\binom{6}{3} = 20$ donc la réponse est fausse.

d. Le nombre caractères Braille est égal à la somme des caractères Braille formés avec 1 trou (soit 6), avec 2 trous (soit 15), avec 3 trous (soit 20), avec 4 trous (soit 15), avec 5 trous (soit 6), avec 6 trous (soit 1) donc le total est $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$, soit $2^6 - 1$ donc la réponse **d.** est correcte et la réponse **e** est fausse.

▶ **4.** Une urne contient 8 boules dont 3 rouges et 5 noires, et 6 cubes dont 2 rouges et 4 noirs. On effectue un tirage de deux objets simultanément, en supposant les tirages équiprobables. Alors :
a. la probabilité de tirer un cube et une boule de couleurs différentes est $\frac{22}{91}$;
b. la probabilité de tirer un cube et une boule de même couleur est $\frac{69}{91}$;
c. la probabilité de tirer deux cubes rouges est $\frac{1}{182}$;
d. la probabilité de tirer au moins une boule noire est $\frac{45}{91}$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. Le nombre de tirages possibles est $\binom{14}{2} = 91$. Le nombre de tirages de deux objets comportant 1 cube et une boule de couleurs différentes est $\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \times \binom{2}{1} = 22$ et la probabilité cherchée est $\frac{22}{91}$ donc la réponse est correcte.

b. Le nombre de tirages comportant un cube et une boule de même couleur est $\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}=6+20=26$ donc la réponse est fausse.

c. La probabilité de tirer deux cubes rouges est $\frac{\binom{2}{2}}{91}=\frac{1}{91}$, donc la réponse est fausse.

d. La présence de la locution « au moins » nous entraîne vers la considération de l'événement contraire « pas de boule noire lors du tirage » dont la probabilité est $\frac{\binom{9}{2}}{91}=\frac{36}{91}$, donc la réponse cherchée est $1-\frac{36}{91}=\frac{55}{91}$.

5. Une usine fabrique des vis de 2 cm de longueur. On note X la loi numérique ayant pour valeurs les longueurs des vis possibles exprimées en cm, p_i la probabilité qu'une vis soit de longueur x_i.
On donne :

x_i	1,8	1,9	2	2,1	2,2
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Alors :
a. l'espérance mathématique de X est 2 ;
b. si on prélève au hasard une vis, la probabilité qu'elle soit au moins de 2 cm est $\frac{3}{4}$.

On prélève **au hasard et avec remise 6 vis.**
La probabilité d'avoir :
c. au moins une vis de 1,8 cm est $\left(\frac{1}{12}\right)^6$;
d. exactement 2 vis de 1,8 cm est $\frac{\binom{6}{2}(11)^4}{12^6}$;
e. au moins une vis de longueur supérieure ou égale à 1,9 cm est $1-\left(\frac{11}{12}\right)^6$.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai ; e. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. $E(X)=1{,}8\times\frac{1}{12}+1{,}9\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+2{,}1\times\frac{1}{6}+2{,}2\times\frac{1}{12}=2$, la réponse fournie est correcte.

b. Nous avons $P(X \geqslant 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$, la réponse fournie est correcte.

c. La probabilité de tirer une vis de 1,8 cm lors d'un tirage est $\frac{1}{12}$, les six tirages successifs avec remise d'une vis de 1,8 cm est, du fait de l'indépendance des tirages, $\left(\frac{1}{12}\right)^6$, donc la réponse fournie est correcte.

d. La probabilité de tirer exactement deux vis de 1,8 cm lors de six tirages successifs avec remise est $\binom{6}{2} \times \left(\frac{11}{12}\right)^4 \times \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \binom{6}{2} \frac{11^4}{12^6}$, donc la réponse est correcte.

e. La probabilité d'avoir au moins une vis de longueur supérieure ou égale à 1,9 cm est obtenue en considérant l'événement contraire « avoir aucune vis de longueur supérieure à 1,9 cm » dont la probabilité est $\left(\frac{11}{12}\right)^6$, donc la réponse fournie est correcte.

6. Soit X une loi numérique définie par : pour tout $k \in \{1, 2, 3 \ldots n\}$, $P(X = k) = \ln(a^k)$ avec $a > 0$.
Alors :

a. $a = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; **b.** $a = e^{\frac{2}{n^2+n}}$; **c.** $a = \frac{n(n+1)}{2}$; **d.** $a = \frac{2}{n(n+1)}$;
e. $a = \frac{1}{n}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Faux ; d. Faux ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

Nous devons avoir : $\sum_{k=1}^{n} \ln(a^k) = 1$, soit $\sum_{k=1}^{n} k \ln a = 1$ ou $(\ln a) \sum_{k=1}^{n} k = 1$,

or $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc : $\ln a = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2}{n(n+1)}$, d'où $a = e^{\frac{2}{n^2+n}}$ et la réponse **b.** est correcte.

7. René aime le chocolat, mais il doit suivre un régime pendant une année. Le premier jour, il ne mange pas de chocolat. Si un jour n donné, $(1 \leqslant n \leqslant 364)$, René ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur 5

qu'il n'en mange pas le lendemain. Si ce même jour, René mange du chocolat, il y a une chance sur 2 qu'il n'en mange pas le lendemain.
Pour $n \geqslant 1$, on désigne par F_n l'événement « René ne mange pas de chocolat le jour n » et par p_n la probabilité de F_n.

a. $P_{F_1}(F_2) = \frac{1}{5}$ et $P_{\overline{F_1}}(F_2) = \frac{1}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 3$, on a : $P_{F_{n-1}}(F_n) = \frac{1}{5}$ et $P_{\overline{F_{n+1}}}(F_n) = \frac{1}{2}$.

c. Pour $n \geqslant 2$, on a : $p_n = -\frac{3}{10}p_{n-1} + \frac{1}{2}$.

d. Pour $n \geqslant 1$, on a : $p_n - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}(0{,}3)^{n-1}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. Nous avons $P(\overline{F_1}) = 0$, donc $P_{\overline{F_1}}(F_2)$ n'a pas de sens.

b. D'après les données, nous avons $P_{F_{n-1}}(F_n) = \frac{1}{5}$ et $P_{\overline{F_{n-1}}}(F_n) = \frac{1}{2}$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, nous avons $F_n = F_n \cap \Omega$ avec $\Omega = F_{n-1} \cup \overline{F_{n-1}}$.

Donc $F_n = F_n \cap (F_{n-1} \cup \overline{F_{n-1}}) = (F_n \cap F_{n-1}) \cup (F_n \cap \overline{F_{n-1}})$,

et $P(F_n) = P(F_n \cap F_{n-1}) + P(F_n \cap \overline{F_{n-1}})$, car $(F_n \cap F_{n-1})$ et $(F_n \cap \overline{F_{n-1}})$ sont incompatibles.

D'où : $p_n = P_{F_{n-1}}(F_n) \times P(F_{n-1}) + P(\overline{F_{n-1}}) \times P_{\overline{F_{n-1}}}(F_n)$

$$p_n = \frac{1}{5}p_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - p_{n-1}).$$

Pour tout $n \geqslant 2$, $p_n = -\frac{3}{10}p_{n-1} + \frac{1}{2}$.

d. La démonstration du résultat annoncé s'effectue par récurrence sur n.

SUJETS Se préparer à l'examen

EXOS Exercices d'application

1 Nous appelons anagramme d'un mot chacun des « mots », ayant un sens ou non, que l'on peut former avec les lettres de ce mot placées à la suite les unes des autres de toutes les façons possibles.
Déterminer le nombre d'anagrammes de :
a. ROI
b. AVANTAGE
c. ANANAS.

2 À l'aide des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on forme des numéros de téléphone à 7 chiffres.
Un numéro pouvant commencer par le chiffre 0, les numéros suivants par exemple, sont acceptés : 0000000, 0010023, …

1. Déterminer le nombre de numéros à 7 chiffres que l'on peut former.

2. Déterminer le nombre de numéros à 7 chiffres tels que :
a. le numéro soit formé avec deux 1, deux 2, trois 9 ;
b. le numéro soit formé avec deux chiffres distincts et deux seulement.

3 Un sondage est effectué dans une société comprenant 40 % de cadres et 60 % d'employés. On sait que 20 % des cadres et 10 % des employés de cette société savent parler l'anglais.

1. On interroge un individu au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit :
a. un cadre sachant parler l'anglais ?
b. un employé sachant parler l'anglais ?
c. une personne sachant parler l'anglais ?

2. L'individu interrogé sait parler l'anglais.
Quelle est la probabilité pour que ce soit un employé ?

3. On interroge au hasard, et de manière indépendante, 15 personnes de cette société.
Quelle est la probabilité pour que, sur ces 15 personnes, 8 parlent l'anglais ?

4 Une loi numérique continue X est une variable uniforme sur [0 ; 1] si elle admet une densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{pour } x > 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f ainsi que la fonction de répartition F associée.

2. Quelle est la probabilité de l'événement $(0{,}25 \leqslant X < 0{,}5)$?

3. Calculer $E(X)$, $V(X)$.

5 Une loi numérique continue de densité de probabilité f est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2-x}{2}$.

1. Vérifier que l'aire comprise entre la courbe de la fonction densité de probabilité et l'axe des abscisses est égale à 1.

2. Représenter graphiquement F et f.

3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXOS Exercices de synthèse

6 Dans une population $\mathcal{P}$, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10 % et 20 % des individus (le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable).
On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela on applique un test qui réagit à la maladie sur 90 % des malades de M_1, sur 70 % des malades de M_2, et sur 10 % des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu i de $\mathcal{P}$, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?

2. Sachant que pour cet individu i le test a réagi, donner les probabilités pour que ce soit à cause de la maladie M_1, à cause de la maladie M_2, sans que i ait l'une des deux maladies.

3. On hospitalise les gens dont le test est positif, pour divers examens et éventuellement un traitement. En moyenne, le coût pour un malade de M_1 est de 300 €, pour un malade de M_2 il est de 200 €, et pour un non-malade il est de 80 €.
Donner la moyenne de ce coût sur chaque individu ayant un test positif. Si on répartit le coût uniformément sur l'ensemble de la population $\mathcal{P}$, combien devra payer chaque individu de $\mathcal{P}$?

7 On étudie la descendance d'un homme aux yeux bruns, porteur du génotype aA constitué par deux gènes différents a et A, au sein d'une population homogène constituée d'individus qui ont les yeux bleus si et seulement s'ils sont porteurs du génotype AA. Chaque individu hybride aA peut également transmettre à son enfant soit le gène a, soit le gène A avec une égale probabilité.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un enfant de l'homme aux yeux bruns ait les yeux bruns ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'un petit-enfant de l'homme aux yeux bruns ait également les yeux bruns ?

3. Si la descendance de l'homme aux yeux bruns comprend, à la seconde génération, trois petit-enfants, donner l'expression de la probabilité $P(k)$ pour que k d'entre eux aient les yeux bruns. Calculer $P(k)$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3.

BAC *L'épreuve*

8 Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :
A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;
B : « On obtient au plus une blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ sont :

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \quad P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad P(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2. Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n + 1$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.
Calculer u_2, u_3, u_4.
Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

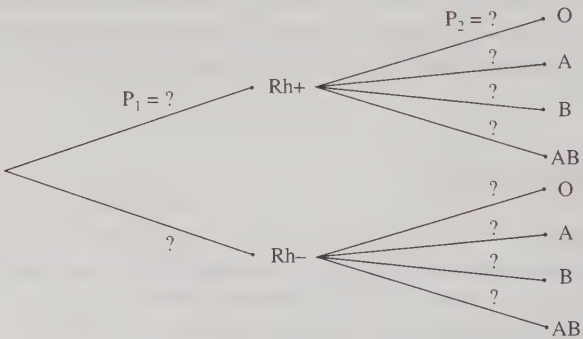
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

9 Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus –	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à 3 décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de France).
On note Rh+ l'événement : « La personne a le facteur Rh+ ».
On note O l'événement : « La personne appartient au groupe O ».

a. Déterminer la probabilité P_1, c'est-à-dire $P(\text{Rh}+)$.
On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.
Déterminer de même la probabilité P_2 (en détaillant les calculs).

b. Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. a. Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ?
Vérifier ce résultat à partir du tableau.
b. Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. a. On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.
b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0{,}999$.

10 À titre expérimental, une cabine téléphonique publique a été équipée d'un système qui coupe automatiquement toute communication au bout de 6 minutes. On note X la durée (en minutes) d'une communication téléphonique dans cette cabine. On admet que la fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0\,;$$
$$F(x) = \frac{x}{6} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 6\,;$$
$$F(x) = 1 \quad \text{si } x > 6.$$

1. Déterminer la probabilité qu'une communication téléphonique dans cette cabine dure :
a. moins de 5 minutes ;
b. moins de 8 minutes ;
c. plus de 10 minutes ;
d. plus de 2 minutes mais au plus 4 minutes ;
e. plus de 4 minutes ;
f. exactement 3 minutes.

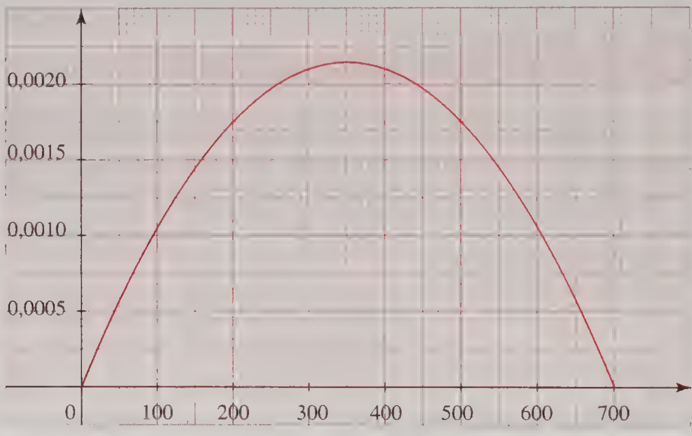
2. Déterminer la densité de probabilité, l'espérance, la variance et l'écart type de X.
Représenter la densité de probabilité f de X.
Représenter les probabilités demandées aux questions **1. a.**, **1. b.**, **1. d.**, sur la représentation graphique de f.

3. On considère 10 communications successives indépendantes.
a. Quelle est la probabilité que ces 10 communications durent toutes moins de 5 minutes ?
b. Quelle est la probabilité que l'une au moins de ces 10 communications dure moins de 5 minutes ?

11 La demande mensuelle d'un certain produit, exprimée en tonnes, est une loi numérique X continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 700]. La densité de probabilité de X est donnée par la fonction f définie par :

$f(t) = \dfrac{3}{171{,}5} \times 10^{-6} \times (700t - t^2)$ pour $t \in [0\,;\,700]$ et $f(t) = 0$ pour $t \notin [0\,;\,700]$.

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



On admettra que $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 0{,}0554$.

1. À l'aide de la représentation graphique de f, déterminer la probabilité que la demande mensuelle X soit :

a. inférieure à 100 tonnes ;

b. inférieure à 350 tonnes ;

c. supérieure à 600 tonnes ;

d. comprise entre 100 tonnes et 350 tonnes

e. inférieure à 800 tonnes ;

f. supérieure à 1 000 tonnes ;

g. égale à 350 tonnes ;

h. inférieure à 350 tonnes sachant qu'elle est supérieure à 100 tonnes.

2. On note F la fonction de répartition de X.

a. Donner $F(100)$.

b. Déterminer F.

12 La distribution des revenus mensuels, exprimés en euros, d'une certaine population de salariés permet de définir la loi numérique X qui, à chaque personne de cette population associe son revenu mensuel en euros. La fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = 1 - \frac{456{,}533}{(0{,}01x)^3} \text{ pour } x > 770 \text{ et } F(x) = 0 \text{ sinon,}$$

X suit une loi dite de Pareto.

1. On tire au hasard un élément de cette population. Déterminer la probabilité que le revenu mensuel de cette personne soit :

a. inférieur à 1 500 € ;

b. supérieur à 770 € ;

c. supérieur à 1 250 € ;

d. compris entre 1 500 € et 2 000 €.

2. Déterminer le salaire mensuel en dessous duquel se situe 95 % de cette population.

3. Déterminer la fonction de densité de X.

13 *Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus.*

Deux joueurs A et B disposant au départ respectivement des sommes S_A et S_B (en euros) pratiquent le jeu suivant :

On lance, plusieurs fois de suite, une pièce non truquée (les lancers sont supposés indépendants).

À la suite de chaque lancer :

Si Pile apparaît, le joueur A donne 1 € au joueur B.

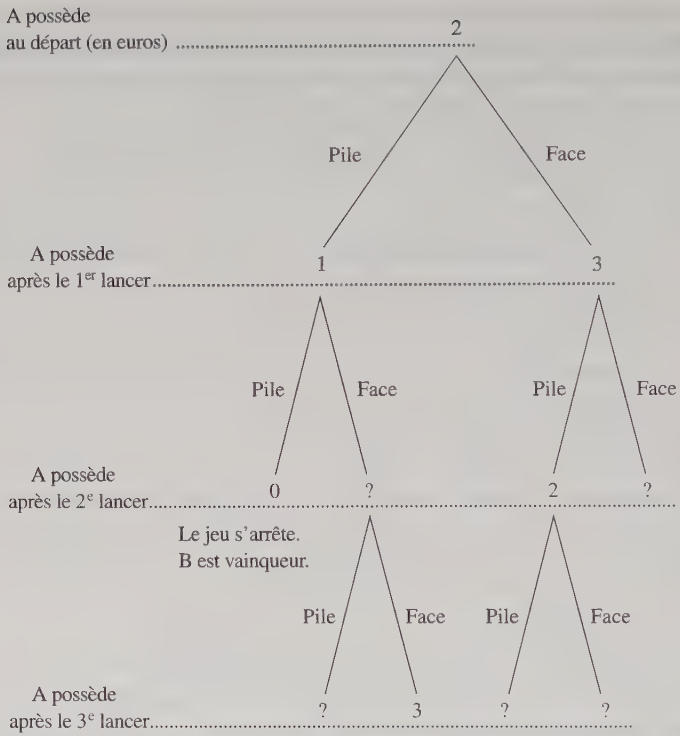
Si Face apparaît, le joueur B donne 1 € au joueur A.

Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné (c'est-à-dire qu'il n'a plus d'argent). L'autre joueur est alors le vainqueur de jeu (il possède alors la somme $S_A + S_B$).

Dans tout l'exercice, on suppose que $S_A + S_B = 4$, *et on limite le jeu à trois lancers.*

1. L'arbre suivant, incomplet, permet de décrire la situation financière du joueur A, au cours des trois lancers, dans un cas particulier. Dans cet arbre, Pile désigne « Pile est sorti » et Face désigne « Face est sorti ».

Compléter l'arbre en remplaçant les points d'interrogation par les valeurs manquantes. On pourra, dans la suite de l'exercice, utiliser ce type d'arbre.



2. Dans cette question, le joueur A possède au départ 2 euros : $S_A = 2$.

a. Déterminer la probabilité P que le joueur A soit vainqueur.

b. Déterminer la probabilité Q que le joueur B soit vainqueur.

c. Déterminer la probabilité R qu'il n'y ait pas de vainqueur du jeu.

3. Dans cette question, le joueur A possède au départ 3 euros : $S_A = 3$.
On note G_A la loi numérique représentant la somme possédée par le joueur A à la fin du jeu.
Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité que G_A soit égal à k, soit $p_k = p(G_A = k)$.

a. Calculer p_k pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b. Déterminer l'espérance mathématique de la loi numérique G_A.
On notera cette espérance $E_3(G_A)$.

4. Dans cette question, le joueur A possède au départ n euros avec : $n \in \{1, 2, 3\}$: $S_A = n$.

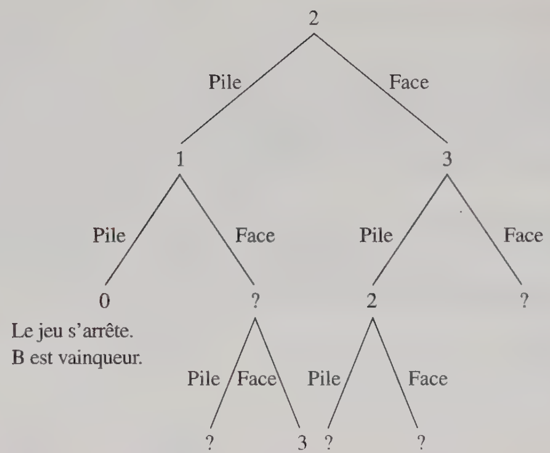
On considère les lois numériques G_A et G_B représentant les sommes possédées par les joueurs A et B à la fin du jeu.

a. Donner une relation entre les espérances mathématiques des lois numériques G_A et G_B.

On notera ces espérances $E(G_A)$ et $E(G_B)$.

b. Calculer l'espérance mathématique de G_A en fonction de n.

1.



2. a. P =

2. b. Q =

2. c. R =

3. a.

k	0	1	2	3	4
p_k					

3. b. $E_3(G_A) =$

4. a. Relation entre $E(G_A)$ et $E(G_B)$

4. b. $E(G_A) =$

14 Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus.

Préambule : Soit t un entier positif.
À l'instant t, une bactérie vit dans un milieu de culture.
À l'instant suivant $t+1$, cette bactérie peut :

- mourir avec une probabilité $\frac{1}{4}$,
- continuer à vivre avec une probabilité $\frac{1}{4}$,
- se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

On suppose, dans cette partie, qu'à l'instant t, il y a deux bactéries b_1 et b_2, dans le milieu de culture, chacune se comportant de la même façon, décrite dans le préambule, et indépendamment l'une de l'autre.
On appelle X le nombre total de bactéries à l'instant $(t+1)$.

1. Compléter le tableau donné, à l'aide du nombre n de bactéries restantes à l'instant $(t+1)$ et de la probabilité p de l'événement correspondant.

2. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

3. a. Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement $\{X = 2\}$.

b. Montrer que la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$ est égale à :

$$p(X = 2) = \frac{5}{16}.$$

Partie B

On suppose, dans cette partie, qu'à l'instant 0, il y a une seule bactérie dans le milieu de culture, qui se comporte comme décrit dans le préambule.
Ensuite, si à l'instant 1, il y a des bactéries, elles se comportent, à l'instant suivant, comme la bactérie initiale et ceci, indépendamment les unes des autres.
Si à un instant, il n'y a plus de bactérie, le processus d'évolution s'arrête.
On se propose d'étudier le nombre de bactéries à l'instant 2.

1. Compléter l'arbre donnant toutes les possibilités pour le nombre de bactéries aux instants 1 et 2. Donner sur chaque branche de l'arbre, la probabilité correspondante.

2. On désigne par A_1 l'événement « À l'instant 1, il y a une bactérie » et par B_2 l'événement « À l'instant 2, il y a deux bactéries ».

a. Donner la probabilité $p_{A_1}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2, sachant qu'il y avait une bactérie à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $p(A_1 \cap B_2)$ qu'il y ait une bactérie à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

3. On désigne par A_2 l'événement « À l'instant 1, il y a deux bactéries ».

a. Donner la probabilité $p_{A_2}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2, sachant qu'il y avait deux bactéries à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $p(A_2 \cap B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

4. Soit Y la loi numérique représentant le nombre de bactéries à l'instant 2.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?

b. Calculer la probabilité de l'événement $\{Y = 2\}$.

c. Calculer la probabilité de l'événement $\{Y = 0\}$.

d. Faire un tableau donnant la loi de probabilité de Y.

e. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

A. 1.

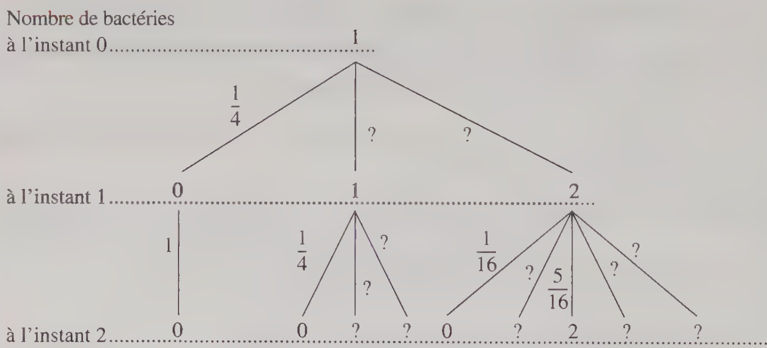
Bactérie b_2 / Bactérie b_1	meurt	continue à vivre	se divise en 2
meurt	$n = 0$ $p = \frac{1}{16}$	$n = \ldots$ $p = \ldots$	$n = \ldots$ $p = \ldots$
continue à vivre	$n = \ldots$ $p = \ldots$	$n = \ldots$ $p = \frac{1}{16}$	$n = \ldots$ $p = \ldots$
se divise en 2	$n = \ldots$ $p = \ldots$	$n = \ldots$ $p = \frac{1}{8}$	$n = 4$ $p = \ldots$

A. 2. $X \in \{\quad\}$

A. 3. a. L'événement $(X = 2)$ est réalisé quand

A. 3. b. $p(X = 2) = \frac{5}{16}$ car

B. 1.



B. 2. a. $p_{A_1}(B_2) =$

B. 2. b. $p(A_1 \cap B_2) =$

B. 3. a. $p_{A_2}(B_2) =$

B. 3. b. $p(A_2 \cap B_2) =$

B. 4. a. $Y \in \{\quad\}$

B. 4. b. $p(Y = 2) =$

B. 4. c. $p(Y = 0) =$

B. 4. d.

y	
$p(Y = y) =$	

B. 4. e. $E(Y) =$

15 On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = x(1-x)\mathrm{e}^x.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ 1]$:

$$f'(x) = (-x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier les variations de la fonction f ; construire son tableau de variations.

3. Soit la fonction F définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $F(x) = (-x^2 + 3x - 3)\,\mathrm{e}^x$.
Montrer que F est une primitive de f.

4. On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I. En donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

5. k désignant un nombre réel, on considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = kf(x)$.

Déterminer la valeur de k telle que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

6. On suppose dans cette question que pour tout x de $[0\ ;\ 1]$,

$g(x) = \dfrac{1}{3-\mathrm{e}} f(x)$; on admet que g est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 1]$.
Soit X la loi numérique continue, prenant ses valeurs dans $[0\ ;\ 1]$, admettant la fonction g comme densité de probabilité. Dans ce cas si a et b sont des nombres réels de $[0\ ;\ 1]$, on a :

$$\mathrm{Prob}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculer la probabilité que X prenne des valeurs comprises entre 0 et 0,5.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** Le nombre de « mots » que l'on peut former avec les 3 lettres **distinctes** du mot ROI est égal au nombre de bijections de $\{1, 2, 3\}$ sur $\{R, O, I\}$ c'est-à-dire au nombre de permutations de l'ensemble $\{R, O, I\}$ soit $\mathbf{3! = 6}$.

b. Cherchons le nombre de « mots » que l'on peut former avec les 8 lettres du mot AVANTAGE. Ces 8 lettres **ne sont pas distinctes** puisque A y figure 3 fois.

Considérons l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, V, N, T, G, E\}$. Avec ces 8 lettres distinctes on peut former 8! « mots ». Mais étant donné un tel mot, en effectuant toutes les permutations possibles sur A_1, A_2, A_3, nous obtenons 3! « mots » différents lorsque les 3 lettres A sont affectées d'indices, et identiques si l'on supprime les indices.

Le nombre d'anagrammes du mot AVANTAGE est donc :

$$\frac{8!}{3!} = 6\,720.$$

c. Le nombre d'anagrammes du mot ANANAS, dans lequel la lettre A est répétée 3 fois et la lettre N 2 fois, est, par un raisonnement analogue :

$$\frac{6!}{3!2!} = 60.$$

2 Un numéro de téléphone est une suite ordonnée de 7 chiffres avec répétition.

1. Un numéro de téléphone de 7 chiffres correspond à une application de l'ensemble $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$ vers $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Le nombre de numéros est alors $\mathbf{10^7}$.

2. a. Le nombre de numéros à 7 chiffres formé avec deux 1, deux 2, trois 9 est $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = \mathbf{210}$. En effet, il y a $\binom{7}{2}$ façons de placer les deux 1, puis, ces deux 1 étant placés, il y a $\binom{5}{2}$ façons de placer les deux 2, puis il reste 3 places pour les trois 9.

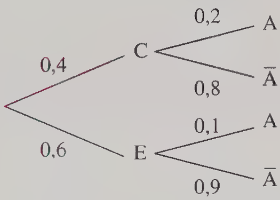
b. Soit C_1 et C_2 deux chiffres distincts, il y a donc $\binom{10}{2}$ façons de choisir deux chiffres distincts. Avec ces deux chiffres, on pourra donc former 2^7 numéros de 7 chiffres (voir **1.**).

Les numéros $C_1C_1C_1C_1C_1C_1C_1$ et $C_2C_2C_2C_2C_2C_2C_2$ ne conviennent pas, d'où le nombre de numéros formés avec deux chiffres distincts, et deux seulement, est $\binom{10}{2} \times (2^7-2)$, **soit 5 670.**

3 Traduisons les données de l'énoncé sous forme de probabilité. La société emploie 40 % de cadres et 60 % d'employés, ce qui se traduit par $p(C) = 0{,}40$ et $p(E) = 0{,}6$.

20 % des cadres et 10 % des employés de cette société savent parler l'anglais ce qui se traduit par $P_C(A) = 0{,}20$ et $P_E(A) = 0{,}10$.

La situation étudiée se traduit de la manière suivante à l'aide d'un arbre pondéré, en appelant C le fait d'être cadre, E celui d'être employé, A celui d'apprendre l'anglais et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.



ou encore pour 100 personnes de l'entreprise

	A	$\overline{A}$	
C	8	32	40
E	6	54	60
	14	86	100

1. a. $P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A)$, soit $\mathbf{P(A \cap C) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08}$.

b. $P(A \cap E) = P(E) \times P_E(A)$, soit $\mathbf{P(A \cap E) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06}$.

c. $P(A) = \dfrac{14}{100}$, soit $\mathbf{P(A) = 0{,}14}$.

2. $P_A(E) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)}$, avec $P(E \cap A) = 0{,}06$ et $P(A) = 0{,}14$.

D'où $P_A(E) = \dfrac{0{,}06}{0{,}14}$, soit $P_A(E) = \dfrac{3}{7}$.

$$\mathbf{P_A(E) \approx 0{,}43.}$$

3. La probabilité pour qu'une personne de l'entreprise parle anglais est 0,14.
La probabilité pour qu'une personne de l'entreprise ne parle pas anglais est 0,86.
Soit F l'événement : « 8 personnes parmi les 15 interrogées parlent anglais ».

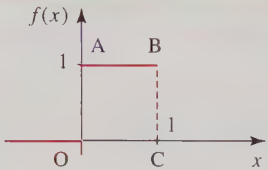
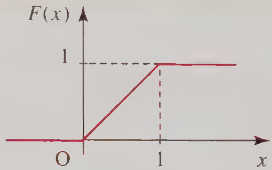
$P(F) = \binom{15}{8}(0{,}14)^8(0{,}86)^7$ (schéma de Bernoulli).

$\mathbf{P(F) \approx 0{,}00033.}$

❹ **1.** f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1$ (f est nulle en dehors de l'intervalle $[0\,;1]$) qui représente l'aire du rectangle OABC. f est bien une densité de probabilité et alors, nous avons $F(x) = P(X \leqslant x)$ est définie par :
pour $x < 0$, $F(x) = 0$;

pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F(x) = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$;

pour $x > 1$, $F(x) = 1$.

Représentation graphique de f	Représentation graphique de F
	

2. La probabilité de l'événement $(0{,}25 \leqslant X < 0{,}5)$ est donnée par :

$$P(0{,}25 \leqslant X < 0{,}5) = \int_{0{,}25}^{0{,}50} 1\,\mathrm{d}t = [t]_{0{,}25}^{0{,}50}$$

soit $\mathbf{P(0{,}25 \leqslant X < 0{,}5) = \frac{1}{4}}$.

3. $E(X) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$ soit $\mathbf{E(X) = \frac{1}{2}}$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ soit $V(X) = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}$

donc $\mathbf{V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}$.

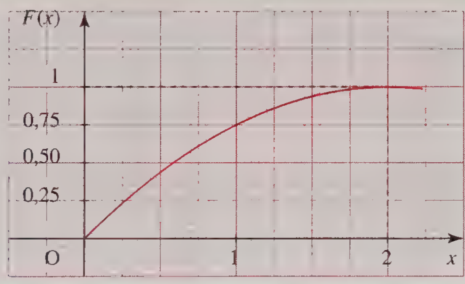
5 **1.** L'aire comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses représente la somme des probabilités. Celle-ci étant égale à 1 :

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

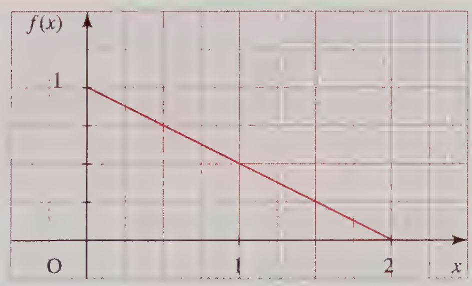
En effet, $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(\frac{2-t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_0^2 = 1 - 0 = \mathbf{1}.$

2. Sur l'intervalle $[0\,;2]$ la fonction F est une primitive de f, soit $F(x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)$.

Représentation graphique de F sur [0 ; 2]



Représentation graphique de f sur [0 ; 2]



3. $E(X) = \int_0^2 t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(\frac{2t - t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^2 = \frac{2}{3} - 0,$

soit $\boldsymbol{E(X) = \frac{2}{3}}$.

$$V(X)=\int_0^2 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2\left(\frac{2t^2-t^3}{2}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right)\right]_0^2=\frac{8}{3}-2,$$

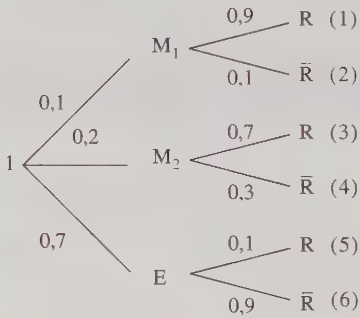
soit $\boldsymbol{V(X)=\frac{2}{3}}$ d'où $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

EXOS Exercices de synthèse

6 Pour $i\in\mathcal{P}$, posons :
M_1 : « i a la maladie M_1 »
M_2 : « i a la maladie M_2 »
E : « i n'a pas la maladie M_1 et n'a pas la maladie M_2 »
R : « le test réagit ».
Les hypothèses nous donnent :

$$P(M_1)=\frac{1}{10};\quad P(M_2)=\frac{2}{10};\quad P(E)=\frac{7}{10};$$
$$P_{M_1}(R)=\frac{9}{10};\quad P_{M_2}(R)=\frac{7}{10};\quad P_E(R)=\frac{1}{10}.$$

Utilisons un arbre pondéré pour interpréter les différentes situations.



1. R est réalisé pour les cas (1), (3) et (5), autrement dit :
$R=(M_1\cap R)\cup(M_2\cap R)\cup(E\cap R)$.
Les événements $M_1\cap R$, $M_2\cap R$, $E\cap R$, étant deux à deux incompatibles :
$P(R)=P(M_1\cap R)+P(M_2\cap R)+P(E\cap R)$.

$P(M_1\cap R)=0{,}1\times 0{,}9=0{,}09$ (cas 1)
$P(M_2\cap R)=0{,}2\times 0{,}7=0{,}14$ (cas 3)
$P(E\cap R)=0{,}7\times 0{,}1=0{,}07$ (cas 5)

car à l'aide des probabilités conditionnelles nous obtenons :

$P(M_1 \cap R) = P(M_1) \times P_{M_1}(R) = 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09$

$P(M_2 \cap R) = P(M_2) \times P_{M_2}(R) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

$P(E \cap R) = P(M_1) \times P_E(R) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07.$

$P(R) = 0{,}09 + 0{,}14 + 0{,}07$

$P(R) = 0{,}3.$

Le test réagit avec une probabilité de 0,3.

La proportion des individus qui ont un test positif par rapport à la population totale est donc 30 %.

2. Nous devons ici déterminer $P_R(M_1)$, $P_R(M_2)$ et $P_R(E)$.

$$P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}09}{0{,}3}, \quad \text{soit } \mathbf{P_R(M_1) = 0{,}3.}$$

$$P_R(M_2) = \frac{P(M_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}14}{0{,}3}, \quad \text{soit } \mathbf{P_R(M_2) = \frac{7}{15}}.$$

$$P_R(E) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}07}{0{,}3}, \quad \text{soit } \mathbf{P_R(E) = \frac{7}{30}}.$$

3. Pour chaque individu ayant eu un test positif, la dépense occasionnée sera de :

300 € avec une probabilité de 0,3 ;

200 € avec une probabilité de $\frac{7}{15}$;

80 € avec une probabilité de $\frac{7}{30}$.

Soit X la loi numérique « dépense occasionnée pour un individu ayant eu un test positif » :

$$P(X = 300) = \frac{3}{10}; \qquad P(X = 200) = \frac{7}{15}; \qquad P(X = 80) = \frac{7}{30}.$$

$$E(X) = 300 \times \frac{3}{10} + 200 \times \frac{7}{15} + 80 \times \frac{7}{30}.$$

$\mathbf{E(X) = 202}$ **€.**

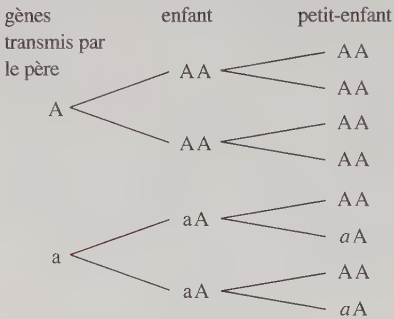
Si N est l'effectif total de la population, le coût total de l'ensemble des tests peut-être estimé à $202 \times N \times 0{,}30$ donc le coût moyen unitaire sur l'ensemble de la population peut-être estimé à $\frac{202 \times N \times 0{,}30}{N} = 202 \times 0{,}30 =$ **60,6 €.**

7 **1.** Utilisons un tableau à double entrée

♀ \ ♂	A	a
A	AA	aA
A	AA	aA

La probabilité pour qu'un enfant de l'homme aux yeux bruns ait également les yeux bruns est : $\mathbf{\frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$.

2. Il est préférable ici d'envisager un arbre de descendance :



Donc, la probabilité pour qu'un petit-enfant de l'homme aux yeux bruns ait les yeux donc bruns est : $\mathbf{\frac{2}{8} = \frac{1}{4}}$.

3. Pour chacun des petits-enfants, l'événement « avoir les yeux bruns » est un schéma de Bernoulli de probabilité $p = \frac{1}{4}$.

Le nombre de petits-enfants $(k = 0, 1, 2, 3)$ qui ont les yeux bruns est une loi numérique qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ avec $n = 3$.

$$\mathrm{P}(k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3$$

$$\mathrm{P}(k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3$$

$$\mathrm{P}(k = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}422$$

$$P(k=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\cdot\frac{9}{64}=0{,}422$$

$$P(k=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=3\cdot\frac{3}{64}=0{,}141$$

$$P(k=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=1\cdot\frac{1}{64}=0{,}015.$$

BAC *L'épreuve*

8 Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On prélève successivement et avec remise, n boules de cette urne (n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Soient A et B les événements :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Soit C l'événement : « Toutes les boules tirées sont de la même couleur ».

C est réalisé lorsque les boules tirées sont :

– soit toutes noires ;

– soit toutes blanches.

La probabilité de tirer une boule blanche au cours d'un tirage est égale à $\frac{5}{10}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. La probabilité de tirer une boule noire est aussi égale à $\frac{1}{2}$ puisque l'urne contient 10 boules dont 5 noires.

Les n tirages s'effectuant de façon indépendante (puisqu'ils sont effectués avec remise), la probabilité de tirer n boules blanches est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et celle de tirer n boules noires est aussi égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Les événements « Toutes les boules tirées sont noires » et « Toutes les boules tirées sont blanches » sont incompatibles. On en déduit que :

$$P(C)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$P(C) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(C) = 2 \times \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbf{P(C) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

La probabilité de tirer n boules de même couleur est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

b. Soit D l'événement « On obtient exactement une boule blanche ».

La probabilité de tirer une boule blanche au cours d'un tirage est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de tirer $n - 1$ boules noires au cours de $n - 1$ tirages est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Les tirages étant effectués de façon indépendante, la probabilité de tirer une boule blanche et $n - 1$ boules noires, la boule blanche étant prélevée à un tirage déterminé, est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$. Or il y a n tirages, donc il y a n façons de tirer la boule blanche.

Par conséquent, on a $\quad P(D) = n \times \frac{1}{2^n}$

$$\mathbf{P(D) = \frac{n}{2^n}.}$$

La probabilité de tirer exactement une boule blanche est égale à $\frac{n}{2^n}$.

c. $A \cap B$ est l'événement « On obtient des boules des deux couleurs et au plus une est blanche », autrement dit, « On obtient une boule blanche et les autres boules sont noires » car si l'on ne tire pas de boule blanche, toutes les boules tirées sont noires et les boules tirées ne sont alors pas des deux couleurs.

On en déduit que $A \cap B = D$,

et par suite que $\quad P(A \cap B) = P(D)$

$$\mathbf{P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}.}$$

L'événement contraire de A est C : « Toutes les boules tirées sont de la même couleur ».

Par conséquent, $\quad P(A) = 1 - P(C)$

$$\mathbf{P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

B est réalisé lorsque l'on a :

– soit tiré n boules noires (événement de probabilité égale à $\frac{1}{2^n}$) ;

– soit tiré 1 boule blanche et $n-1$ boules noires (événement D de probabilité égale à $\frac{n}{2^n}$).

Ces deux événements étant incompatibles, on en déduit que :

$$P(B) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n}$$

$$\mathbf{P(B) = \frac{n+1}{2^n}.}$$

2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si, seulement si,

$$\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n}\left(n - (n+1)\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = 0$$

$$n - (n+1)\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$$

$$n - n - 1 + \frac{n+1}{2^{n-1}} = 0$$

$$\frac{n+1}{2^{n-1}} = 1$$

$$\mathbf{2^{n-1} = n+1.}$$

A et B sont indépendants si, et seulement si, $2^{n-1} = n+1$.

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.

Nous avons :

- $u_2 = 2^1 - 3$ donc $\boldsymbol{u_2 = -1.}$
- $u_3 = 2^2 - 4$ soit $\boldsymbol{u_3 = 0.}$
- $u_4 = 2^3 - 5$ et donc $\boldsymbol{u_4 = 3.}$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1-1} - (n+1+1) - 2^{n-1} + (n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2^n - 2^{n-1} - 1$$

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n-1}(2-1) - 1$$

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1.$$

Or la suite (v_n) définie par $v_n = 2^{n-1}$ est géométrique de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme $v_2 = 2$ $(v_2 > 0)$, ce qui permet d'affirmer que (v_n) est strictement croissante. Par conséquent :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on a $v_n \geqslant 2$, et par suite,
pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0.}$$

Ce qui prouve que (u_n) est strictement croissante.

4. Nous avons montré à la question précédente que $u_3 = 0$, donc $2^{n-1} = n + 1$ pour $n = 3$. Puisque (u_n) est strictement croissante, on en déduit que si $n > 3$, alors $u_n > 0$ et $u_2 < 0$ donc $u_n = 0$ si, et seulement si, $n = 3$.
Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, on effectue trois prélèvements successifs d'une boule dans l'urne.

9 **1.** Soient Rh+ et O les événements :
Rh+ : « La personne a le facteur Rh+ » ;
O : « La personne appartient au groupe O ».

a. Soit P_1 la probabilité de l'événement Rh+.
Les événements O, A, B et AB sont deux à deux incompatibles et forment une partition de l'univers. Nous avons donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P_1 = P(Rh+ \cap O) + P(Rh+ \cap A) + P(Rh+ \cap B) + P(Rh+ \cap AB)$ et le tableau de répartition nous donne :

$$P(Rh+ \cap O) = \frac{35}{100}$$

$$P(Rh+ \cap A) = \frac{38{,}1}{100}$$

$$P(Rh+ \cap B) = \frac{6{,}2}{100}$$

et $$P(Rh+ \cap AB) = \frac{2{,}8}{100}.$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$P_1 = \frac{35}{100} + \frac{38{,}1}{100} + \frac{6{,}2}{100} + \frac{2{,}8}{100}$$

$$P_1 = \frac{82{,}1}{100}$$

$$\boldsymbol{P_1 = 0{,}821.}$$

La probabilité qu'une personne soit de facteur Rh+ est égale à 0,821.

La probabilité P_2 est définie par :

$$P_2 = P_{Rh+}(O)$$

c'est-à-dire $$P_2 = \frac{P(O \cap Rh+)}{P(Rh+)}$$

$$P_2 = \frac{0,35}{0,821}$$

$$\mathbf{P_2 = 0,426 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

La probabilité qu'une personne de facteur Rh+ soit du groupe O est égale à 0,426 à 10^{-3} près.

b. Bien que le détail des calculs ne soit pas demandé, on peut cependant justifier les résultats énoncés dans l'arbre donné page suivante.

Les événements Rh+ et Rh– forment une partition de l'univers Ω considéré

donc $$P(Rh+) + P(Rh-) = 1$$

$$0,821 + P(Rh-) = 1$$

d'où $$P(Rh-) = 0,179.$$

Nous avons $$P_{Rh+}(A) = \frac{P(A \cap Rh+)}{P(Rh+)}$$

$$P_{Rh+}(A) = \frac{0,381}{0,821}$$

soit $$P_{Rh+}(A) = 0,464 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

De la même façon, $$P_{Rh+}(B) = \frac{P(B \cap Rh+)}{P(Rh+)}$$

$$P_{Rh+}(B) = \frac{0,062}{0,821}$$

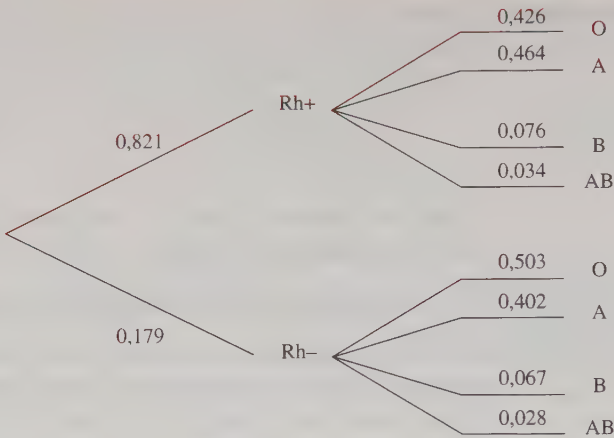
$$P_{Rh+}(B) = 0,076 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Puisque $$P_{Rh+}(O) + P_{Rh+}(A) + P_{Rh+}(B) + P_{Rh+}(AB) = 1$$

on en déduit que $$0,426 + 0,464 + 0,076 + P_{Rh+}(AB) = 1$$

$$P_{Rh+}(AB) = 0,034.$$

Une démarche analogue permet d'établir les possibilités associées aux branches issues de l'événement Rh–.



2. a. La probabilité de O est obtenue à partir de l'arbre en additionnant les produits de probabilité issus des branches aboutissant à O :

$$P(O) = 0{,}426 \times 0{,}821 + 0{,}503 \times 0{,}179$$

$$\mathbf{P(O) = 0{,}440 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Les données du tableau permettent d'établir directement que :

$$P(O) = \frac{35}{100} + \frac{9}{100}$$

$$\mathbf{P(O) = 0{,}440 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

b. La probabilité qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ est $P_{Rh+}(O)$:

$$P_{Rh+}(O) = \frac{P(Rh+ \cap O)}{P(O)}$$

$$P_{Rh+}(O) = \frac{0{,}35}{0{,}44}$$

$$\mathbf{P_{Rh+}(O) = 0{,}795 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

La probabilité qu'une personne du groupe O ait le facteur Rh+ est égale à 0,795 à 10^{-3} près.

3. a. On considère n personnes choisies au hasard dans la population française.

La probabilité qu'aucune des n personnes ne soit du groupe O est $(1 - P(O))^n = (0{,}56)^n$ (on suppose que n est suffisamment petit pour ne pas modifier la répartition des groupes sanguins et des facteurs et que, par conséquent, on se trouve en situation d'indépendance).

« Au moins une des n personnes est du groupe O » est l'événement contraire de « Aucune des n personnes n'est du groupe O ». On en déduit que sa probabilité p est :

$$\mathbf{p = 1 - (0{,}56)^n.}$$

b. $p \geqslant 0{,}999$ équivaut à $1 - (0{,}56)^n \geqslant 0{,}999$

$$(0{,}56)^n \leqslant 0{,}001$$

$$\ln(0{,}56)^n \leqslant \ln 0{,}001$$

$$n \ln 0{,}56 \leqslant \ln 0{,}001$$

soit $$n \geqslant \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}56}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}56} = 11{,}9$ à 0,1 près.

Il faut choisir au moins 12 personnes pour que la probabilité qu'au moins une d'entre elles soit du groupe O soit supérieure à 0,999.

10 **1.** Rappelons que dans le cas d'une loi numérique continue, on a pour tout x :
$P(X = x) = 0$ et $P(X \leqslant x) = P(X < x)$ et par définition d'une fonction de répartition $F(x) = P(X \leqslant x)$.

a. Nous cherchons $P(X < 5)$ et $P(X < 5) = F(5)$ or $0 < 5 < 6$,

donc $\mathbf{P(X < 5) = \frac{5}{6}}$.

b. Nous cherchons $P(X < 8)$ et l'événement $(X < 8)$ est l'événement certain donc $\mathbf{P(X < 8) = 1}$ ou encore $P(X < 8) = F(8) = 1$.

c. L'événement $(X > 10)$ est l'événement impossible donc $\mathbf{P(X > 10) = 0}$ ou encore $P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 1 - 1 = 0$.

d. Nous avons :
$P(2 < X \leqslant 4) = F(4) - F(2)$ avec $F(4) = \dfrac{4}{6}$ et $F(2) = \dfrac{2}{6}$

donc $\mathbf{P(2 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{1}{3}}$.

e. $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - F(4)$ avec $F(4) = \dfrac{4}{6}$ soit $\mathbf{P(X > 4) = \frac{1}{3}}$.

f. $\mathbf{P(X = 3) = 0}$.

2. Nous savons que la densité de probabilité d'une loi numérique continue est la dérivée de la fonction de répartition.

f densité de probabilité de X est donc la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{6}$ pour $0 \leqslant x < 6$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin [0\ ;\ 6[$.

L'espérance de X est donnée par $E(X) = \displaystyle\int_0^6 t\, f(t)\, \mathrm{d}t$,

soit $E(X) = \displaystyle\int_0^6 t \times \frac{1}{6}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{12}\right]_0^6$

donc $\quad E(X) = \dfrac{36}{12} - 0$ soit $\boldsymbol{E(X) = 3}$**.**

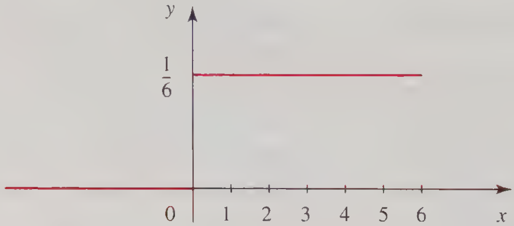
La variance de X est donnée par $V(X) = \displaystyle\int_0^6 t^2 f(t)\, \mathrm{d}t - [E(X)]^2$,

soit $V(X) = \displaystyle\int_0^6 t^2 \times \frac{1}{6}\, \mathrm{d}t - 9 = \left[\frac{t^3}{18}\right]_0^6 - 9$,

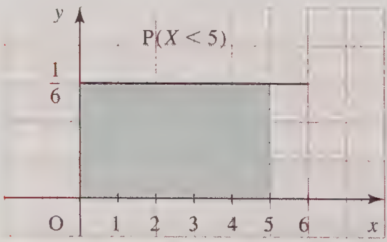
donc $\quad V(X) = \dfrac{6^3}{18} - 0 - 9$ et $\boldsymbol{V(X) = 3}$**.**

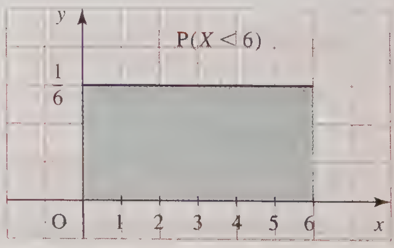
L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{3}}$ ce qui correspond à environ 1 minute 44 secondes.

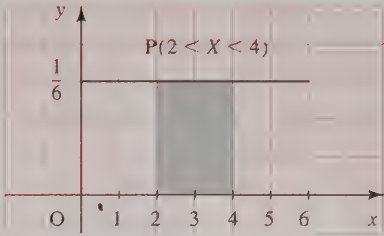
Représentation graphique de la densité de probabilité :

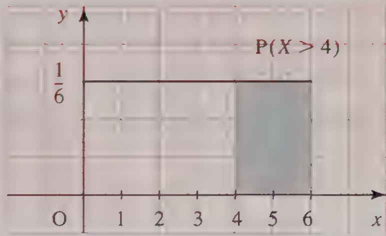


Les probabilités déterminées en **1. a.**, **1. b.**, **1. d.**, sont égales aux aires des portions de plan grisées sur les schémas suivants :









3. Notons $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ les durées respectives des 10 communications. Soit E l'événement « les 10 communications durent toutes moins de 5 minutes ».

a. $P(E) = P[(X_1 < 5) \cap (X_2 < 5) \cap \ldots \cap (X_{10} < 5)]$, les événements $(X_1 < 5)$, $(X_2 < 5)$, …, $(X_{10} < 5)$ sont indépendants par hypothèse et chacun de probabilité $\frac{5}{6}$;

donc $\mathbf{P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}}$.

b. Soit A l'événement « l'une au moins des 10 communications dure moins de 5 minutes ». Nous avons :

$$P(A) = P[(X_1 < 5) \cup (X_2 < 5) \cup \ldots \cup (X_{10} < 5)].$$

Nous avons : l'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est défini par « toutes les communications durent 5 minutes ou plus » et $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

D'où $P(A) = 1 - P[(X_1 \geqslant 5) \cap (X_2 \geqslant 5) \cap \ldots \cap (X_{10} \geqslant 5)]$.

Or $X_1, \ldots X_{10}$ sont indépendantes donc :

$$P(A) = 1 - P(X_1 \geqslant 5) \times P(X_2 \geqslant 5) \times \ldots \times P(X_{10} \geqslant 5) ;$$

or, $P(X_1 \geqslant 5) = P(X_2 \geqslant 5) = \cdots = P(X_{10} \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = \frac{1}{6}$;

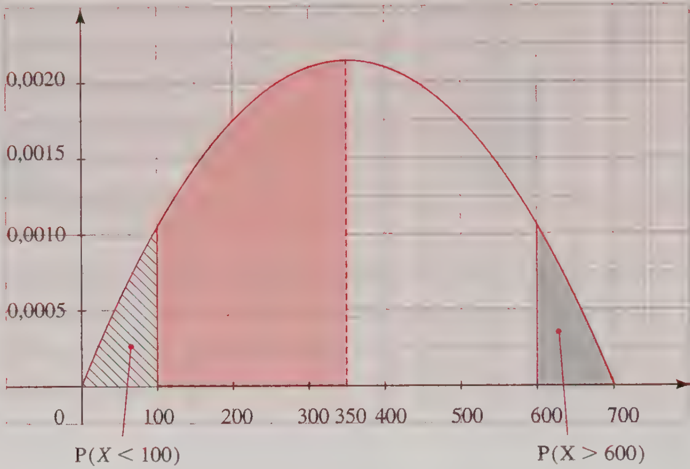
donc $P(A) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

soit $P(A) \approx 1$.

Sur 10 communications successives et indépendantes, il est presque certain que l'une au moins durera moins de 5 minutes.

11 **1. a.** Nous avons $P(X < 100) = \int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathbf{P(X < 100) = 0{,}0554}$.

Il s'agit de l'aire de la portion de plan hachuré sur le schéma page suivante :



b. De même, $P(X < 350) = \int_0^{350} f(t)\,dt$. Mais compte tenu de la symétrie de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $t = 350$ et sachant que l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1, nous en déduisons que $\int_0^{350} f(t)\,dt = 0{,}5$, et par suite $\mathbf{P(X < 350) = 0{,}5}$.

c. Nous avons : $P(X > 600) = \int_{600}^{700} f(t)\,dt$ qui est l'aire de la portion grisée sur le schéma ci-dessus. Compte tenu de la symétrie de la courbe, nous avons :

$\int_{600}^{700} f(t)\,dt = \int_0^{100} f(t)\,dt = 0{,}0554$ donc $\mathbf{P(X > 600) = 0{,}0554}$.

d. Nous avons : $P(100 \leqslant X \leqslant 350) = F(350) - F(100)$

$\mathbf{P(100 \leqslant X \leqslant 350)} = 0{,}5 - 0{,}0554$

soit $P(100 \leqslant X \leqslant 350) = \mathbf{0{,}4446}$.

e. $\mathbf{P(X < 800) = 1}$ car il s'agit de l'événement certain.

f. $\mathbf{P(X > 1\,000) = 0}$ car il s'agit de l'événement impossible.

g. X est une loi numérique continue donc $\mathbf{P(X = 350) = 0}$.

h. Nous cherchons la probabilité conditionnelle $P_{(X > 100)}(X < 350)$.

Or, $\underset{(X>100)}{\mathrm{P}}(X<350)=\dfrac{\mathrm{P}[(X<350)\cap(X>100)]}{\mathrm{P}(X>100)}$

$\underset{(X>100)}{\mathrm{P}}(X<350)=\dfrac{\mathrm{P}[(100<X<350)]}{\mathrm{P}(X>100)}=\dfrac{0{,}4446}{1-0{,}0554}$

$\underset{(X>100)}{\mathrm{P}}(X<350)\approx\mathbf{0{,}4707}.$

2. a. Nous avons :

$F(100)=\mathrm{P}(X\leqslant 100)=\mathrm{P}(X<100)$ car X est continue

donc $\boldsymbol{F(100)=0{,}0554}$.

b. Pour $x<0$, $F(x)=0$

Pour $0\leqslant x<700$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$F(x)=\int_0^x a(700t-t^2)\,\mathrm{d}t \text{ avec } a=\frac{3}{171{,}5}\times 10^{-6}$$

$$\boldsymbol{F(x)}=\left[a\left(350t^2-\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^x=\boldsymbol{a\left(350x^2-\frac{x^3}{3}\right)}.$$

Pour $x>700$, $\boldsymbol{F(x)}=\displaystyle\int_0^{700} f(t)\,\mathrm{d}t=\mathbf{1}.$

12 **1. a.** Nous cherchons $\mathrm{P}(X<1\,500)$ mais $F(x)=\mathrm{P}(X<x)$ et X est continue donc :

$\mathrm{P}(X\leqslant 1\,500)=F(1\,500)=1-\dfrac{456{,}533}{(0{,}01\times 1\,500)^3}$ car $1\,500>770$

soit $\mathbf{P(X\leqslant 1\,500)=0{,}8647}$.

b. Nous devons déterminer $\mathbf{P(X>770)}$ soit $1-F(770)=\mathbf{1}$.

c. Nous devons déterminer $\mathrm{P}(X>1\,250)$, or $\mathrm{P}(X>1\,250)=1-\mathrm{P}(X\leqslant 1\,250)$ donc $\mathrm{P}(X>1\,250)=1-F(1\,250)$.

$$\mathbf{P(X>1\,250)}=1-\left(1-\frac{456{,}533}{(0{,}01\times 1\,250)^3}\right)\approx\mathbf{0{,}2337}.$$

d. Nous devons déterminer $\mathrm{P}(1\,500\leqslant X<2\,000)=F(2\,000)-F(1\,500)$.

Or, $F(2\,000)-F(1\,500)=\left(1-\dfrac{456{,}533}{(0{,}01\times 2\,000)^3}\right)-\left(1-\dfrac{456{,}533}{(0{,}01\times 1\,500)^3}\right)$

$$F(2\,000)-F(1\,500)=456{,}533\times\left(\frac{1}{15^3}-\frac{1}{20^3}\right)=\mathbf{0{,}0782}.$$

2. Nous devons déterminer x tel que $P(X < x) = 0{,}95$ pour $x > 770$ ce qui équivaut à :

$$1 - \frac{456{,}533}{(0{,}01x)^3} = 0{,}95$$

$$\frac{456{,}533}{(0{,}01x)^3} = 0{,}05$$

$(0{,}01x)^3 = \dfrac{456{,}533}{0{,}05}$ soit $0{,}01x = \sqrt[3]{\dfrac{456{,}533}{0{,}05}}$

donc $x \approx 2\,090{,}10$.

95 % des individus de cette population ont un revenu mensuel inférieur à 2 090 euros.

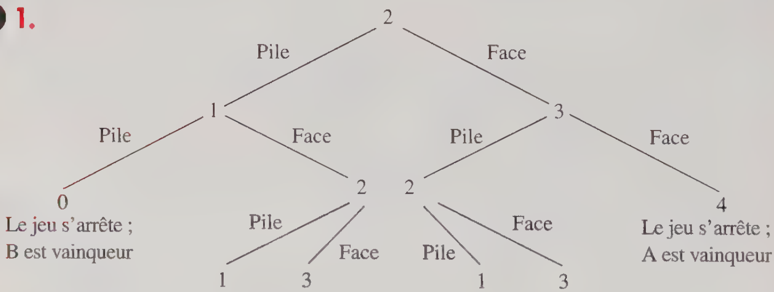
3. La densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition en tout point où F est dérivable.

Pour $x > 770$, $F(x) = 1 - \dfrac{456{,}533}{(0{,}01x)^3}$

donc $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1\,369\,599\,000}{x^4}}$ **pour $\boldsymbol{x > 770}$ et $\boldsymbol{f(x) = 0}$ pour $\boldsymbol{x \leqslant 770}$.**

Remarque : f n'est pas continue au point $x_0 = 770$ car F n'est pas dérivable en ce point.

13 **1.**

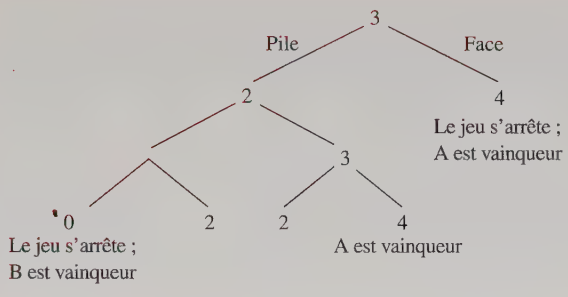


2. a. $P = \dfrac{1}{4}$;

b. $Q = \dfrac{1}{4}$;

c. $R = \dfrac{1}{2}$.

3. a.



k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{8}$

b. $E_3(G_A) = 3$.

4. a. Relation entre $E(G_A)$ et $E(G_B)$.
$E(G_A) + E(G_B) = 4$ car, à chaque lancer, l'argent possédé globalement par l'ensemble des 2 joueurs ne varie pas, cette somme est égale à $s_A + s_B = 4$.
b. $E(G_A) = n$.

14 Partie A

1.

Bactérie b_1 \ Bactérie b_2	meurt	continue à vivre	se divise en 2
meurt	$n = 0$ $p = \frac{1}{16}$	$n = 1$ $p = \frac{1}{16}$	$n = 2$ $p = \frac{1}{8}$
continue à vivre	$n = 1$ $p = \frac{1}{16}$	$n = 2$ $p = \frac{1}{16}$	$n = 3$ $p = \frac{1}{8}$
se divise en 2	$n = 2$ $p = \frac{1}{8}$	$n = 3$ $p = \frac{1}{8}$	$n = 4$ $p = \frac{1}{4}$

2. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

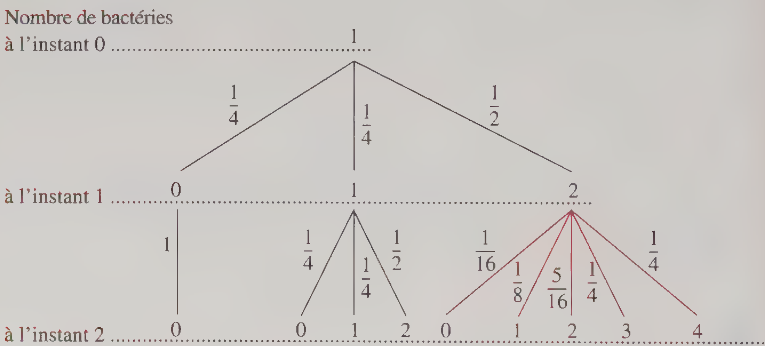
3. a. L'événement $(X = 2)$ est réalisé quand « b_1 et b_2 continuent à vivre » ou « l'une des deux bactéries meurt et l'autre se divise en deux ».

b. $p(X = 2) = \dfrac{5}{16}$ car $p(b_1$ et b_2 continuent à vivre$) = \dfrac{1}{16}$,

p(l'une des deux bactéries meurt et l'autre se divise en deux) $= \dfrac{4}{16}$ (événements incompatibles).

Partie B

1.



Le tableau de la partie A sert à compléter la partie de l'arbre en rouge.

2. a. $p_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$.

b. $p(A_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.

3. a. $p_{A_2}(B_2) = \dfrac{5}{16}$.

b. $p(A_2 \cap B_2) = \dfrac{5}{16} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{32}$.

4. a. L'ensemble des valeurs prises par Y est $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

b. $p(Y = 2) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{32} = \dfrac{9}{32}$.

c. $p(Y = 0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.

d.

y	0	1	2	3	4
$p(Y=y)$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

e. $E(Y)=\dfrac{25}{16}$.

15 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x(1-x)e^x$.

1. Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f'(x)=(1-2x)e^x+(x-x^2)e^x$

$$f'(x)=e^x(-x^2-x+1).$$

2. $f'(x)=0$ pour $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ mais $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'appartient pas à $[0\,;1]$.

Signe de $f'(x)$:

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		+	0	−	

Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
Variations de f	0	↗		↘	0

3. Soit F la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $F(x)=(-x^2+3x-3)e^x$.

Pour tout x de $[0\,;1]$, $F'(x)=(-2x+3)e^x+(-x^2+3x-3)e^x$

$$F'(x)=(-x^2+x)e^x$$

$$F'(x)=x(1-x)e^x=f(x),$$

donc **F est une primitive de f sur $[0\,;1]$.**

4. $I=\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)$ avec $F(1)=-e$ et $F(0)=-3$ donc $I=-e+3$.

Une valeur approchée de I est 0,2817.

5. Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = kf(x)$.

$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ si, et seulement si, $kI = 1$ soit $\boldsymbol{k = \frac{1}{3-\mathrm{e}}}$.

6. Pour tout x de $[0\,;1]$, $g(x) = \frac{1}{3-\mathrm{e}}f(x)$ et l'on suppose que g est une densité de probabilité sur [0 ; 1].
Nous avons alors :

$$\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{1}{3-\mathrm{e}}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3-\mathrm{e}}(F(0{,}5) - F(0)).$$

Donc : $\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{1}{3-\mathrm{e}}\left(-\frac{7}{4}\mathrm{e}^{0{,}5} + 3\right)$.

Une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-4} près est **0,4073.**

6 Suites numériques

1 Généralités

1 Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

2 Suites croissantes, décroissantes, stationnaires

Une suite u est **croissante** lorsque, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Une suite u est **décroissante** lorsque, pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
Une suite u est **stationnaire** lorsque, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.
Une suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

3 Suites majorées et minorées

Une suite u est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant M$.
Une suite u est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \geqslant m$.
Une suite v majore ou domine la suite u lorsqu'il existe un entier k tel que, pour tout entier n, $n \geqslant k$: $u_n \leqslant v_n$.

4 Principe de démonstration par récurrence

Soit P une propriété dépendant de n, $n \in \mathbb{N}$, et n_0 un entier naturel donné.
Pour montrer que P est vraie pour tout n, $n \geqslant n_0$, il suffit de vérifier que :

- P est vraie pour $n = n_0$;
- si P est vraie pour $n = k$, $k \geqslant n_0$, alors P est vraie pour $n = k + 1$.

2 Suites arithmétiques – Suites géométriques

1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite u est arithmétique s'il existe **un réel r** tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r.}$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite.

Propriétés caractéristiques

- Une suite u est arithmétique *si, et seulement si,* $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ est un réel **constant** pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ce réel constant est alors la raison de la suite.

- Une suite u est arithmétique *si, et seulement si,* il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr.}$
r est alors la **raison** de la suite.

Somme des n premiers termes

Soit u une suite arithmétique, de raison r et de premier terme u_0, et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ la somme des n premiers termes de u.

On a : $S_n = \dfrac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$,

ou encore :

$$S_n = \frac{\begin{pmatrix}\textbf{nombre de termes}\\ \textbf{de la somme}\end{pmatrix} \times (\textbf{premier terme de la somme + dernier terme de la somme})}{2}.$$

Cas particulier important

Trois réels a, b, c pris dans cet ordre, forment une suite (ou progression) arithmétique si, et seulement si, $a + c = 2b$.

2 Suites géométriques

Définition

Une suite u est géométrique s'il existe **un réel q non nul** tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q.}$$

Le réel q s'appelle **la raison** de la suite géométrique u.

Propriétés caractéristiques

- Une suite u dont aucun terme n'est nul est géométrique *si, et seulement si,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel **constant**, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce réel constant est alors la raison de la suite.

- Une suite u est géométrique *si, et seulement si,* il existe un réel q non nul tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 q^n}$.

q est alors la **raison** de la suite.

Somme des n premiers termes

- Si q est un réel différent de 1, alors : $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

- Soit u une suite géométrique, de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ la somme des n premiers termes de u :

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{pmatrix} 1^{\text{er}} \text{ terme} \\ \text{de la somme} \end{pmatrix} \times \left(\frac{1-q^{\begin{pmatrix}\text{nombre de termes}\\ \text{de la somme}\end{pmatrix}}}{1-q} \right).$$

Cas particulier important

Trois réels a, b, c, pris dans cet ordre, forment une suite (ou progression) géométrique si, et seulement si, $ac = b^2$.

3 Limites – Encadrements

1 Suites de limite infinie

Soit u une suite numérique de terme général u_n.

Si u_n est de la forme $\sqrt{n}$ ou $n^k (k \in \mathbb{N}^*)$ ou $b^n (b > 1)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

En particulier, si u est une suite géométrique de raison $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, suivant le signe de u_0.

■ Si une suite v est telle que, pour $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant \lambda u_n$, avec λ réel positif et u l'une des suites précédentes, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2 Suites convergentes

■ Soit u une suite numérique de terme général u_n.

Si u_n est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ou $\dfrac{1}{n}$ ou $\dfrac{1}{n^2}$ ou $\dfrac{1}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ ou b^n $(b \in]-1\,;1[-\{0\})$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$: la suite ***u* converge vers 0.**

En particulier, si u est une suite géométrique de raison q telle que $q \neq 0$ et $|q| < 1$, alors u converge vers 0.

■ On dit qu'une suite u **converge vers** ℓ lorsque la suite de terme général $u_n - \ell$ converge vers 0.

■ **Propriété d'encadrement dite « des gendarmes »**
Soit u, v, w trois suites telles que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si u et w convergent vers ℓ, alors v converge aussi vers ℓ.

3 Croissances comparées

Les résultats sont déduits de ceux énoncés pour les fonctions.

■ Pour $a \in]1\,;+\infty[$ et $\alpha \in]0\,;+\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

■ Pour $|a| < 1$, $a \neq 0$ et $\alpha \in]0\,;+\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha a^n = 0$.

MÉTHODES

1 Comment démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

arithmétique ?

• En montrant que l'on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = k$.

• En montrant qu'il existe deux réels a et b, avec $b \neq 0$, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + bn$.

Si $b = 0$, la suite est arithmétique de raison 0.

géométrique ?

• En montrant que l'on peut trouver $q \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

• En montrant qu'il existe deux réels a et b, avec $b \neq 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ab^n$.

croissante (respectivement décroissante) ?

• En montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$).

• En montrant, dans le cas où $u_n = f(n)$, que la fonction numérique f est croissante (respectivement décroissante) sur $\mathbb{R}^+$.

• En montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$),

pour (u_n) suite à termes tous strictement positifs.

• En montrant, dans le cas où $u_{n+1} = g(u_n)$, que la fonction $x \mapsto g(x) - x$ est positive.

majorée (respectivement minorée) ?

• En utilisant les méthodes connues sur les inégalités.

• En utilisant, dans le cas où $u_n = f(n)$, le fait que f est majorée (respectivement minorée) sur un intervalle du type $[P, +\infty[$, $P \in \mathbb{N}$.

• En utilisant la méthode de récurrence dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$.

convergente ?

• En montrant que (u_n) est une suite géométrique dont la raison q vérifie $|q| < 1$.

• En montrant, dans le cas où $u_n = f(n)$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est finie.

• En montrant que, pour $n \geqslant p$, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ avec (w_n) et (v_n) convergeant vers une même limite.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier la réponse avec précision.

▶ **1.** La suite de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique.

▶ **2.** La suite de terme général $u_n = 3 + 5n$ est arithmétique.

▶ **3.** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie, pour tout n, $u_n < \mathrm{e}^n$ ne converge pas puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.

▶ **4.** Soit $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$, alors $S_n = 2^n - 1$.

▶ **5.** $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n - 2^n) = +\infty$.

▶ **6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$.

▶ **7.** Soit (u_n) la suite réelle définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n}$, alors :

a. (u_n) est positive ;
b. (u_n) est majorée par 2 ;
c. (u_n) est convergente ;
d. (u_n) est monotone ;
e. (u_n) est divergente.

▶ **8.** **a.** La suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 + (-1)^n$, a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Toute suite réelle ayant pour limite $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

c. Une suite réelle (u_n), n entier naturel, telle que $u_{2n} < 0$ et $u_{2n+1} > 0$ est divergente.

d. La suite (u_n), n entier naturel, telle que $u_n = \frac{5 + 3\ln(25^n)}{\ln(5^n) + 6}$ converge vers 6.

▶ **9.** Les suites de terme général U_n suivants sont convergentes.

a. $U_n = n\ln(n^2 + 1) - 2n\ln n$; **b.** $U_n = n\ln(n^2 + 1) - 3n\ln n$;

c. $U_n = \left(1 + \frac{a^3}{n}\right)^n$ $(a > 0)$.

▶ 10. Les suites de terme général U_n suivants sont convergentes vers 3 :

a. $U_n = 3n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$; **b.** $U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9n-1}{3n+4}$; **c.** $U_n = (-3)^n + 3$.

▶ 11. La somme définie par $S = 1+2+3+\ldots+(n+1)$ vaut :

a. $\frac{n(n+3)}{2}$; **b.** $\frac{(n+1)(n+3)}{2}$; **c.** $\frac{n(n+2)}{2}$.

▶ 12. La somme définie par $S = a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{n+2}$ $(a \neq 1)$ vaut :

a. $S = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$; **b.** $S = a^2\frac{(a^{n+1}-1)}{a-1}$; **c.** $S = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$.

▶ 13. La somme définie par $S = a^3+a^4+\cdots+a^n$ $(a \neq 1)$ vaut :

a. $S = \frac{a^n - a^3}{a-1}$; **b.** $S = \frac{a^3(1-a^{n-2})}{1-a}$; **c.** $S = \frac{a^3-a^{n-1}}{a-1}$.

2 Réponses

▶ 1. Les suites $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.

Mais : $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$.

Or : $u_1 = \frac{1}{12}u_0$, $u_2 = \frac{13}{6}u_1$, donc (u_n) n'est pas géométrique.

▶ 2. La réponse est correcte puisque (u_n) est une suite de la forme $(a+bn)$, avec a et b réels fixés.

▶ 3. On ne peut rien conclure quant à la suite (u_n).
Contre-exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n < e^n$ et la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n < e^n$ et la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

▶ 4. S_n est la somme de $\boldsymbol{n+1}$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 et de 1^er^ terme 1 donc : $S_n = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$, soit $S_n = 2^{n+1} - 1$.

Le résultat proposé est faux par suite d'une faute dans le dénombrement du nombre de termes de S_n.

▶ **5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n - 2^n = 2^n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$,

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n - 2^n) = +\infty$.

▶ **6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} = \frac{n - 2^n}{n2^n}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geqslant n + 1$.
En effet, $2^n - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ (voir la question **4.**) et $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} > n$ puisque tous les termes de cette suite sont supérieurs à 1.

Il s'ensuit que $n - 2^n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} < 0$ soit :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$.

Remarquons que l'on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

▶ **7.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai ; **d.** Faux ; **e.** Faux.

▶ **8.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Vrai.

▶ **9.** **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Vrai.

▶ **10.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **11.** **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Faux.

▶ **12.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

▶ **13.** **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

GÉRER SES CONNAISSANCES

Pour chacun des exercices suivants, dire si les affirmations a, b, c..., sont vraies ou fausses ?

▶ 1. Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n) on a :

a. si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ implique $u_n = v_n$;

b. si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0$ implique $u_n = \frac{1}{n}$;

c. si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent ;

d. si $(u_n v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent ;

e. si $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0 ou (v_n) converge vers 0.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. L'affirmation est fausse, il suffit pour cela de considérer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$. Elles convergent toutes les deux vers 0 et il n'existe pas d'entier n_0 tel que, pour $n > n_0$, on ait $u_n = v_n$.

b. La suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, converge bien vers 0 et pourtant il n'existe aucun entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0$ implique $u_n = \frac{1}{n}$.

c. Les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - n^2$ et $v_n = n^2$ sont telles que $(u_n + v_n)$ converge vers 1 et pourtant chacune des deux suites est divergente, car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc l'affirmation est fausse.

d. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (-1)^n$ et $v_n = 1 + (-1)^n$. Nous avons $u_n v_n = 1 - (-1)^{2n} = 0$, donc la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 (suite constante nulle) et pourtant les deux suites (u_n) et (v_n) sont des suites n'admettant pas de limite. En effet, la suite (u_n) est constituée de termes valant alternativement 0 ou 2 et la suite (v_n) est constituée de termes valant alternativement 2 ou 0.

e. La réponse précédente nous permet également de montrer que la proposition est fausse.

▶ 2. Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_4 = 0$ et $u_6 = -1$. Alors :

a. $u_5 = -\frac{1}{2}$;

b. pour tout entier n, on a $u_n = \frac{4-n}{2}$;

c. pour tout entier $n \geqslant 9$, on a $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqslant 0$;

d. la suite (v_n) définie, pour n entier naturel non nul, par $v_n = \frac{1}{n}e^{u_n}$ est convergente.

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. Nous avons, puisque la suite est arithmétique, $u_5 = \frac{u_4 + u_6}{2} = -\frac{1}{2}$.

b. La suite (u_n) est arithmétique, sa raison est $-\frac{1}{2}$ et son premier terme $u_0 = 2$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 + n\left(-\frac{1}{2}\right)$, soit $u_n = \frac{4-n}{2}$.

c. $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, elle vaut donc $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$, soit $\frac{n}{4}(9-n)$, résultat qui est négatif ou nul dès que $n \geqslant 9$.

d. Pour tout n entier naturel non nul nous avons :

$$v_n = \frac{1}{n}e^{\frac{4-n}{2}} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{4-n}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc (v_n) est convergente vers 0.

▶ 3. Pour toute suite numérique (u_n), on a :

a. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors (u_n) est convergente ;

b. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \leqslant \frac{1}{n+1}$, alors (u_n) est convergente vers 3 ;

c. si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, alors (u_n) est convergente ;

d. si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$, alors (u_n) est convergente ;

e. si (u_n) converge vers 0, alors (u_n) est une suite croissante et négative ou décroissante et positive.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Vrai ; d. Faux ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. La réponse est fausse, il suffit de considérer le contre-exemple : $u_n = 1 + |\sin n|$.

b. La réponse est fausse, il suffit de considérer le contre-exemple : $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$, en effet, nous avons alors $u_n - 3 = \frac{1}{n+1} - 1$ qui est bien inférieur à $\frac{1}{n+1}$ et qui ne converge pas vers 3, mais plutôt vers 2.

c. Toute suite géométrique de raison comprise entre –1 et 1 est convergente.

d. La réponse proposée est fausse, car, pour tout n entier naturel, $u_n = u_0 - \frac{n}{2}$ et la limite de cette suite est $-\infty$.

e. Cette affirmation est fausse, il suffit de considérer le contre-exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ qui est le terme général d'une suite convergente vers 0, mais qui possède des termes alternativement positifs et négatifs.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ \text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Alors :

a. la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;

b. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;

c. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone ;

d. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{2}{3}$.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Faux.**

■ **Justifications :**

a. La fonction dérivée de f est définie par :

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$. La réponse proposée est fausse.

b. La réponse est fausse puisque $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $u_1 = \dfrac{6}{13}$ avec $\dfrac{6}{13} < \dfrac{2}{3}$.

c. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est négative sur $[0\,;\,1]$.

d. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{2}{3}$.

▶ **5.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{(0{,}1)^n}$. Alors :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty$;

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$;

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$;

d. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ;

e. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux limites distinctes.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Faux ; c. Faux ; d. Vrai ; e. Faux.**

■ **Justifications :**

a. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(0{,}1)^n} = (-10)^n$, donc u_n est le terme général d'une suite géométrique de raison $-10(<-1)$, donc sa limite à l'infini n'est pas $-\infty$.

b. Pour les mêmes raisons que précédemment, la limite de la suite (u_n) ne peut être $+\infty$.

c. De même cette affirmation est fausse.

d. La suite (u_n) n'admet pas de limite puisque les termes de rang pair tendent vers $+\infty$ et les termes de rang impair tendent vers $-\infty$.

e. Une suite ne peut admettre deux limites distinctes.

▶ **6.** On considère la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$ et la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > \mathrm{e}$ donné et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

a. pour tout x de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, on a $f'(x) \geqslant 2$;

b. pour tout entier naturel n, on a : $u_n > \mathrm{e}$;

c. la suite (u_n) est croissante ;

■ **Réponses : a. Vrai ; b. Vrai ; c. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \ln x$ et pour tout $x \geqslant \mathrm{e}$, on a $\ln x \geqslant 1$. Donc pour tout x de $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 2$ et la réponse fournie est correcte.

b. Le résultat se prouve à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Par hypothèse, $u_0 > \mathrm{e}$. Supposons $u_k > \mathrm{e}$ et démontrons qu'alors $u_{n+1} > \mathrm{e}$. Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est strictement croissante sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc si $u_k > \mathrm{e}$, alors $f(u_k) > f(\mathrm{e})$, soit $u_{k+1} > 0$, donc la réponse est correcte.

c. La croissance de la suite (u_n) est une conséquence de la positivité de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

▶ **7.** Soit f une fonction définie, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$ est croissante sur $\mathbb{R}$;

b. la fonction $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$;

c. pour tout réel $a > 0$, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(ax)$ est croissante sur $\mathbb{R}$;

d. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ est décroissante.

■ **Réponses : a. Faux ; b. Vrai ; c. Vrai ; d. Vrai.**

■ **Justifications :**

a. La réponse proposée est fausse car $-3 < -2$ et $g(-3) = f(3)$, $g(-2) = f(2)$. Or, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ nous avons $f(2) \leqslant f(3)$, soit $g(-2) \leqslant g(-3)$.

b. La composée de deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction h est la composée de $x \mapsto ax$ croissante sur $\mathbb{R}$, car $a > 0$, par la fonction f croissante sur $\mathbb{R}$, donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.

d. La suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{3^n}$ est décroissante et f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ est décroissante.

SUJETS Se préparer à l'examen

EXOS Exercices d'application

1 Parmi les suites proposées ci-dessous, indiquer celles qui sont arithmétiques ou géométriques.

a. $u_n = 2n - 5,\ n \in \mathbb{N}$;

b. $u_n = \dfrac{1 + 2^n}{1 + 3^n},\ n \in \mathbb{N}$;

c. $u_n = 3^{n-2} \cdot 7^{n+3},\ n \in \mathbb{N}$;

d. $u_n = 2^n + 3 \cdot 4^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$;

e. $u_n = 3^n + 5 \cdot 7^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$;

f. $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{5}n,\ n \in \mathbb{N}$.

2 On définit la suite (u_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + 2\ln n$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n^2}{e^{u_n}}$, est géométrique et convergente. On déterminera son premier terme et sa raison.

2. Calculer $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXOS Exercices de synthèse

3 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de nombres réels positifs, définie par son premier terme $u_1 = e^2$ et par la relation de récurrence :

$u_n^2 \cdot e = u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{1 + \ln u_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer v_n en fonction de u_{n-1}, puis en fonction de v_{n-1} pour $n > 1$.

2. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_1 et la raison.

Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites satisfaisant aux trois conditions (1) suivantes :

$$(1)\ (u_n \text{ est croissante})\ ;\ (v_n \text{ est décroissante})\ ;\ \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

1. Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n = v_n - u_n$ est décroissante. En déduire que, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

5 On étudie la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. À l'aide d'une calculatrice, calculer $u_n - u_{n-1}$ et u_n pour $n = 1, 2, \ldots, 16$.

2. Étudier le sens de variation de cette suite.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $u_{n^2} > \frac{1}{2} + u_n$.

4. Montrer, par récurrence sur p, que, pour tout entier naturel p, il existe un entier naturel n tel que $u_n > p$.

5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

6 Soit a et b deux nombres réels distincts. On définit la suite (u_n) par $u_1 = a + b$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 uniquement à l'aide de $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ et $a^4 - b^4$. Démontrer que le résultat obtenu est général.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

7 On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^6} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{2n}}.$$

1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, S_n et $S_n - S_{n-1}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 13$.

2. Calculer $S_n - \frac{1}{4}S_n$. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de (S_n) quand n tend vers $+\infty$ (on pourra d'abord montrer que $0 \leqslant \frac{n}{2^{2n}} < \frac{1}{2^n}$).

8 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, u_n pour $n = 1, 2, \ldots, 10$.

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que cette suite est majorée par le nombre 2.

3. Montrer que $2 - u_{n+1} < \dfrac{2 - u_n}{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers 2.

9 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, u_n pour $n = 1, 2, \ldots, 17$.

2. Montrer que la suite (u_n) est définie dans $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ et les points $M_{n-1}(u_{n-1}, u_n)$.

4. En s'aidant du graphique précédent, trouver une méthode permettant de montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

10 **1.** Montrer que, quels que soient les réels a et b strictement positifs et l'entier naturel n supérieur à 2, on a $b^n > a^n$ si, et seulement si, $b > a$.

2. Montrer que, quel que soit le réel a strictement positif et l'entier naturel n supérieur à 2, on a : $(1 + a)^n > 1 + na$. (1)

3. On considère la suite définie par : $u_n = \sqrt[n]{2}, \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

N.B. : Si $A \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on note $\sqrt[n]{A}$ ou encore $A^{\frac{1}{n}}$ le réel positif α tel que $\alpha^n = A$, on peut calculer ce nombre avec une calculatrice, en utilisant la touche $\boxed{y^x}$ ($\sqrt[2]{A}$ se note simplement $\sqrt{A}$).

a. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, u_n pour $n = 2, 3, \ldots, 20$.

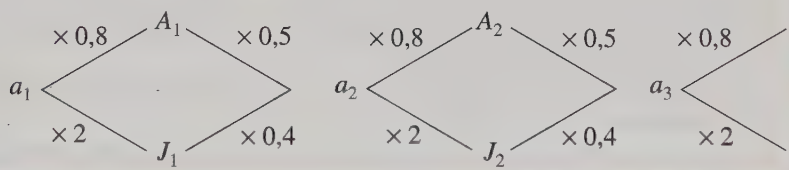
b. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1 et strictement décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

11 Nous allons étudier l'évolution d'une population d'animaux en tenant compte des taux de mortalité et de natalité.

L'année est divisée en deux périodes : une saison de reproduction et une saison hivernale. En début de première saison de reproduction, la population n'est constituée que d'adultes en nombre a_1. En fin de première saison de reproduction, la population est constituée d'adultes et de jeunes ; si A_1 est alors le nombre d'adultes et J_1 celui de jeunes, on a : $A_1 = 0{,}8a_1$ (80 % des adultes survivent) et $J_1 = 2a_1$ (il y a deux fois plus de jeunes que le nombre initial d'adultes).

Pendant la saison hivernale, les jeunes se transforment tous en adultes, mais 40 % d'entre eux survivent ; leur nombre en fin de cette période est alors $0{,}4\,J_1$. Les adultes restent évidemment adultes et 50 % d'entre eux survivent ; leur nombre en fin de période est alors $0{,}5\,A_1$. Ainsi, la population au début de la seconde saison de reproduction n'est constituée que d'adultes en nombre a_2 et l'on a : $a_2 = 0{,}5A_1 + 0{,}4J_1$. Le cycle se poursuit suivant le même schéma.



reproduction	hiver	reproduction	hiver	reproduction

1. a. On suppose que $a_1 = 1\ 000$; calculer A_1 et J_1, puis a_2, A_2, J_2 et enfin a_3, A_3, J_3.

b. On appelle a_n, A_n et J_n les effectifs tels qu'ils ont été définis la $n^{\text{ième}}$ année. Nous avons alors : $A_n = 0{,}8a_n$; $J_n = 2a_n$; $a_{n+1} = 0{,}5A_n + 0{,}4J_n$.
Calculer a_{n+1} en fonction de a_n. Montrer que l'on a aussi $J_{n+1} = 1{,}2J_n$ et $A_{n+1} = 1{,}2A_n$. Que peut-on conclure pour les suites a, A et J ?

c. Combien d'années se sont écoulées au début de la onzième saison de reproduction ? Calculer a_{11}, A_{11}, J_{11}.

d. Que représente pour cette population la somme $A_n + J_n$? La suite $A + J$ est-elle géométrique ?

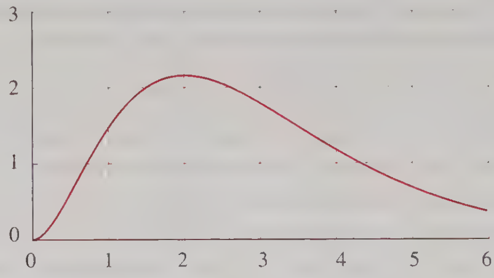
2. a. Montrer que la suite a est strictement croissante.

b. À l'aide d'une calculatrice déterminer $(1{,}2)^{13}$ et expliquer pourquoi $a_{14} > 10a_1$. Qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+13} > 10a_n$. Qu'est-ce que cela signifie ?

c. Après combien d'années a-t-on $a_n > 1\ 000a_1$?

d. Quelle est la limite de la suite a ?

12 La courbe (Γ) ci-dessous représente, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=4x^2\mathrm{e}^{-x}$.



Toutes les aires sont données en unités d'aire.
On note u_0 l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites qui ont pour équations $x=0$ et $x=1$.
On note u_1 l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites qui ont pour équations $x=1$ et $x=2$.
D'une façon générale, pour tout entier naturel n, on note u_n l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites qui ont pour équations $x=n$ et $x=n+1$.

1. À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

a. De quel entier u_1 est-il le plus proche : de 0, de 1, de 2 ou de 8 ?
Quels entiers encadrent u_5 ?
(Aucune justification n'est demandée.)

b. (u_n) est-elle une suite croissante ? (Justifier la réponse.)

2. a. Pourquoi la fonction f est-elle positive sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$?

b. Calculer $f'(x)$ pour $x\geqslant 0$; démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $[2\ ,+\infty[$.

3. a. Exprimer u_{10} à l'aide d'une intégrale.

b. Pour x appartenant à l'intervalle $[10, 11]$, utiliser le sens de variation de f pour encadrer $f(x)$ à l'aide de $f(10)$ et $f(11)$.

c. En déduire que $f(11)\leqslant u_{10}\leqslant f(10)$.
À l'aide de la calculatrice, donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_{10}.

13 *Donner les réponses aux questions dans les cadres prévus ci-après.*

Étude d'une suite

On considère la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant :

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = h(v_n) \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. a. Exprimer $h\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction de n.

b. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

2. a. Déterminer $h'(x)$.

b. Quel est le sens de variation de h sur $[0\,;1]$?

3. a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \leqslant v_p \leqslant \frac{1}{p}$.

Justifier alors que $0 \leqslant v_{p+1} \leqslant \frac{1}{p+1}$.

b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Justifier la réponse.

1. a.	$h\left(\frac{1}{n}\right) =$
1. b.	$h\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$ car
2. a.	$h'(x) =$
2. b.	h
3. a.	
3. b.	Démonstration par récurrence :
4.	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ car

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** La suite u de terme général $u_n = 2n - 5$ est de la forme $an + b$ avec $a = 2$ et $b = -5$, donc **u est une suite arithmétique de raison 2.**
Nous avons aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 5 - 2n + 5$

$$u_{n+1} - u_n = 2.$$

Ce qui confirme bien le résultat trouvé précédemment.

b. Nous avons $u_0 = 1$, car $2^0 = 3^0 = 1$; $u_1 = \frac{3}{4}$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{9}{28}$.

La suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique car :

$$u_1 = u_0 - \frac{1}{4} \; ; \; u_2 = u_1 - \frac{1}{4} \; ; \text{ mais } u_3 = u_2 - \frac{5}{28}$$

$$\text{et : } u_1 = \frac{3}{4}u_0 \text{ et } u_2 = \frac{2}{3}u_1 .$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{3^n}{9} \times 7^n \times 7^3$

$$u_n = (21)^n \times \frac{343}{9}.$$

Nous pouvons dire que **la suite u est géométrique de raison $q = 21$.**
Nous avons aussi $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n-1} \times 7^{n+4}}{3^{n-2} \times 7^{n+3}}$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \times 7 = 21$,

ce qui confirme bien le résultat trouvé précédemment.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 3 \cdot (2^2)^{n+1}$

$$u_n = 2^n + 3 \cdot 2^{2n+2}$$

$$u_n = 2^n(1 + 3 \cdot 2^{n+2})$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 13 \\ u_1 = 50 \end{array}\right\} u_1 = u_0 \times \frac{50}{13}, \quad u_1 = u_0 + 37$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 50 \\ u_2 = 196 \end{array}\right\} u_2 = u_1 \times \frac{98}{25}, \quad u_2 = u_1 + 146.$$

La suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.

e. De même :

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 6 \\ u_1 = 38 \end{array}\right\} u_1 = u_0 + 32, \ \ u_1 = u_0 \times \frac{19}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 38 \\ u_2 = 254 \end{array}\right\} u_2 = u_1 + 216, \ \ u_2 = u_1 \times \frac{127}{19}.$$

La suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.

f. **u est une suite arithmétique** avec $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

La raison de cette suite est $r = \frac{1}{5}$.

2 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n + 2\ln n$.

$$e^{u_n} = e^n \times e^{2\ln n} \text{ avec } e^{2\ln n} = n^2$$

$$e^{u_n} = n^2 e^n.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n^2}{n^2 e^n}$

$$v_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

(v_n) est par conséquent la suite géométrique (de type b^n) de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{e}$.

2. S_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(v_n)_{n>0}$.

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ avec } q = \frac{1}{e} \text{ et } v_1 = \frac{1}{e}$$

$$S_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{e - 1}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0, \text{ car } 0 < \frac{1}{e} < 1, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{e - 1}.$$

EXOS Exercices de synthèse

3 **1.** La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, nous avons donc :

$u_n^2 \cdot \mathrm{e} = u_{n-1}$ ce qui équivaut à $\ln(u_n^2 \cdot \mathrm{e}) = \ln u_{n-1}$.

Soit $2(\ln u_n) + 1 = \ln u_{n-1}$.

Or $v_n = \dfrac{1 + \ln u_n}{2}$ et $\ln u_n = \dfrac{-1 + \ln u_{n-1}}{2}$.

Nous obtenons, pour $n > 1$, $\boldsymbol{v_n = \dfrac{1 + \ln u_{n-1}}{4}}$.

Nous avons :

$v_{n-1} = \dfrac{1 + \ln u_{n-1}}{2}$, soit $4v_n - 1 = 2v_{n-1} - 1$ et, pour $n > 1$, $\boldsymbol{v_n = \dfrac{1}{2} v_{n-1}}$.

2. De la question **1.**, nous déduisons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **est une suite géométrique de premier terme** $\boldsymbol{v_1 = \dfrac{1 + \ln u_1}{2} = \dfrac{3}{2}}$ **et de raison** $\boldsymbol{q = \dfrac{1}{2}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$,

soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{v_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1 + \ln u_n}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$1 + \ln u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\ln u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1.$$

$\boldsymbol{u_n = \mathrm{e}^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$, car $\ln a = b$ équivaut à $a = \mathrm{e}^b$ pour $a > 0$.

3. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\left(0 < \dfrac{1}{2} < 1\right)$, elle converge donc vers 0. Nous avons :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 = -1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \mathrm{e}^{-1}$ d'où l'on tire :

$\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.

4 **1.** Pour tout entier n, $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n).$$

Or, pour tout n, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ puisque (v_n) est décroissante et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ puisque (u_n) est croissante. Donc, pour tout n, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ et, par conséquent, la suite (w_n) est **décroissante**.

La suite (w_n) converge vers 0 par hypothèse, elle est donc, étant décroissante, minorée par sa limite 0 (en effet, s'il existait un entier p tel que $w_p < 0$, on aurait alors, pour tout $n \geqslant p$, $w_n \leqslant w_p < 0$. Par conséquent, la limite L de la suite (w_n) vérifierait $L \leqslant w_p$, ce qui serait en contradiction avec les hypothèses. Nous avons donc pour tout n, $w_n \geqslant 0$ soit $\boldsymbol{u_n \leqslant v_n}$.

2. La suite (u_n) est croissante et elle est majorée par v_0, elle est donc convergente et, par conséquent, elle admet une limite $l \leqslant v_0$.

La suite (v_n) est décroissante et elle est minorée par u_0, elle est donc convergente et, par conséquent, elle admet une limite $l' \geqslant u_0$.

De plus, nous avons : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ donc $l' - l = 0$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes et admettent la même limite l.

Remarquons que :

• pour tout n, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$,

• les deux suites vérifiant les conditions (1) sont dites adjacentes.

5 **1.** On obtient les résultats suivants en calculant $u_n - u_{n-1}$ et u_n pour $n = 1$, 2, 3, …, 16.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n}$	–	0,5	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,125
u_n	1	1,5	1,83	2,08	2,28	2,45	2,59	2,72
n	9	10	11	12	13	14	15	16
$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n}$	0,11	0,1	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06
u_n	2,83	2,93	3,02	3,10	3,18	3,25	3,32	3,38

2. On a : $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n}$, donc $u_n - u_{n-1} > 0$.

et, par suite, **la suite (u_n) est strictement croissante.**

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$$u_{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} = u_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

donc : $$u_{n^2} > u_n + \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{(n^2 - n) \text{ termes}}$$

soit $u_{n^2} > u_n + \frac{n^2 - n}{n^2}$ ou encore $u_{n^2} > u_n + 1 - \frac{1}{n}$

or on a $1 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 2$, et par suite :

$$\boldsymbol{u_{n^2} > u_n - \frac{1}{2}}.$$

4. La propriété « Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > p$ » est vraie pour $p = 0$ puisque la suite considérée est une suite à termes strictement positifs : supposons-la vraie pour l'entier p $(p \geqslant 0)$ et démontrons qu'elle l'est également pour $p + 1$.
Sachant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > p$, on peut en déduire, puisque la suite est strictement croissante, qu'il existe $N \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que $u_N > p$, on a donc :

$$u_{N^2} > \frac{1}{2} + u_N > \frac{1}{2} + p \quad \text{donc} \quad u_{N^4} > \frac{1}{2} + u_{N^2} > 1 + p$$

et on a bien trouvé $N^4 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_{N^4} > p + 1.$$

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > p$.

5. On peut, d'après **4.** trouver $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_q > p$; par conséquent, la suite (u_n) étant croissante, on a pour tout $n > q$:

$$u_n > u_q > p > A$$

ce qui démontre bien que :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$

Remarque : Le calcul de $u_1, \ldots, u_{16}$ fait au **1.**, ne nous donnait aucune indication sur la limite éventuelle de la suite (u_n).

6 **1.** Nous avons : $u_1 = a + b = \dfrac{(a+b)(a-b)}{a-b}$

car $a \neq b$, donc $\boldsymbol{u_1 = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}}$;

puis $u_2 = a + b - \dfrac{ab}{\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}}$,

donc u_2 n'est défini que si $a \neq -b$, ce que nous supposerons dans la suite de l'exercice, d'où :

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{(a+b)(a^2-b^2) - ab(a-b)}{a^2 - b^2} = \boldsymbol{\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}}$$

$$\boldsymbol{u_3} = a + b - \frac{ab}{\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}} = \frac{(a+b)(a^3-b^3) - ab(a^2-b^2)}{a^3 - b^3} = \boldsymbol{\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}}.$$

Nous allons montrer que, plus généralement, la suite est définie dès que $a \neq \pm b$ et que $u_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$, pour tout $n \geqslant 1$.
Cette formule est vraie pour $n = 1$, supposons qu'elle soit vraie pour n.
Nous écrirons donc :

$$u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n} = a + b - \frac{ab}{\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}}.$$

u_{n+1} est bien défini car $a \neq \pm b$ donc $a^p - b^p \neq 0$, pour tout $p \geqslant 1$, d'où

$$u_{n+1} = \frac{(a+b)(a^{n+1} - b^{n+1}) - ab(a^n - b^n)}{a^{n+1} - b^{n+1}} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a^{n+1} - b^{n+1}} ;$$

en conclusion, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boldsymbol{u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}}.$$

2. Si $|a| < |b|$, on a : $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1} b$,

donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b}$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$.

Si $|a| > |b|$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, car a et b jouent des rôles symétriques.

Le cas $|a| = |b|$ n'est pas envisagé car $a \neq \pm b$.

7 **1.** On a les résultats suivants à l'aide d'un tableur en calculant S_n et $S_n - S_{n-1}$ pour $n = 0, 1, \dots, 13$.

n	$S_n - S_{n-1} = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}$	S_n
0	–	1
1	0,75	1,75
2	0,312 5	2,062 5
3	0,109 4	2,171 9
4	0,035 2	2,207 0
5	0,010 7	2,217 8
6	0,003 2	2,220 9
7	0,000 9	2,221 9
8	0,000 26	2,222 12
9	0,000 072	2,222 19
10	0,000 020	2,222 215
11	0,000 005 5	2,222 220 2
12	0,000 001 5	2,222 221 7
13	0,000 000 4	2,222 222 1

2. On a : $S_n = 1 + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{3}{2^4} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-2}} + \dfrac{2n+1}{2^{2n}}$

et $\dfrac{1}{4}S_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{3}{2^4} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2^n}} + \dfrac{2n+1}{2^{2n+2}}$, d'où :

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = 1 + \frac{3-1}{2^2} + \frac{5-3}{2^4} + \cdots + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{2^{2n}} - \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$\mathbf{S_n - \frac{1}{4}S_n = 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^{2n}} - \frac{2n+1}{2^{2n+2}}},$$

ou enfin :

$$\frac{3}{4}S_n = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) - \frac{2n+1}{2^{2n+2}}.$$

L'expression entre parenthèses est la somme des termes d'une suite géométrique de n termes dont le premier terme est $\dfrac{1}{2}$ et la raison $\dfrac{1}{2^2}$; elle a donc pour valeur :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

et l'on a :

$$\frac{3}{4}S_n = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) - \frac{2n+1}{2^{2n-2}} = \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3 \times 2^{2n-1}} + \frac{2n+1}{2^{2n+2}}\right)$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{6n+11}{3 \times 2^{2n+2}},$$

d'où

$$\mathbf{S_n = \frac{20}{9} - \frac{6n+11}{9 \times 2^{2n}}}.$$

3. On a :

$$S_n = \frac{20}{9} - \frac{6 + \frac{11}{n}}{9} \cdot \frac{n}{2^{2n}},$$

or, on montre immédiatement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$, il en résulte donc que l'on a :

$$0 \leqslant \frac{n}{2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant \frac{n}{2^{2n}} < \frac{1}{2^n} \ ;$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on a donc, *a fortiori* :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{2n}} = 0$$

(voir théorèmes admis sur les comparaisons de suites) ; on a, de plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{11}{n} = 0$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{6 + \frac{11}{n}}{9} = \frac{6}{9}$$

et, finalement,

$$\mathbf{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{20}{9}}.$$

Remarque : On a $\frac{20}{9} = 2{,}222\,222\,22\ldots$ par conséquent, les calculs faits au **1.** montrent que la suite (S_n) converge très rapidement.

8 **1.** En calculant u_n pour $n = 1, 2, \ldots, 10$ à l'aide d'un tableur on obtient :

n	1	2	3	4	5
u_n	1,412	1,847 8	1,961 6	1,990 4	1,997 6

n	6	7	8	9	10
u_n	1,999 4	1,999 8	1,999 962	1,999 990 5	1,999 997 6

2. Il s'agit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 2$.

Or $u_1 = \sqrt{2}$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vérifiée pour un entier naturel non nul n et démontrons qu'elle l'est encore pour $n + 1$. Nous avons :

$$u_n < 2 \quad \text{donc} \quad u_n + 2 < 4 \quad \text{donc} \quad \sqrt{u_n + 2} < 2 \quad \text{soit} \quad u_{n+1} < 2\ ;$$

donc **la suite (u_n) est majorée par le nombre 2**.

3. Nous avons :

$$2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n} = \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$$

donc $$2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}, \quad \text{puisque } 2 - u_n > 0.$$

On a vu que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$$

donc : $$0 < 2 - u_n < \frac{2 - u_{n-1}}{2} < \ldots < \frac{2 - u_1}{2^{n-1}} \quad \text{pour } n \geqslant 2,$$

c'est-à-dire que : $$0 < 2 - u_n < \frac{2 - \sqrt{2}}{2^{n-1}} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Or $$\lim_{n \to +\infty} \frac{2 - \sqrt{2}}{2^{n-1}} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} (2 - u_n) = 0$$

et, par conséquent, $$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}.$$

Remarque : Les calculs fait au **1.** nous montrent que la suite (u_n) converge rapidement vers sa limite 2.

Interprétation géométrique : Notons $(\mathscr{C})$ la courbe représentative, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction :

$$j : x \mapsto f(x) = \sqrt{2 + x}.$$

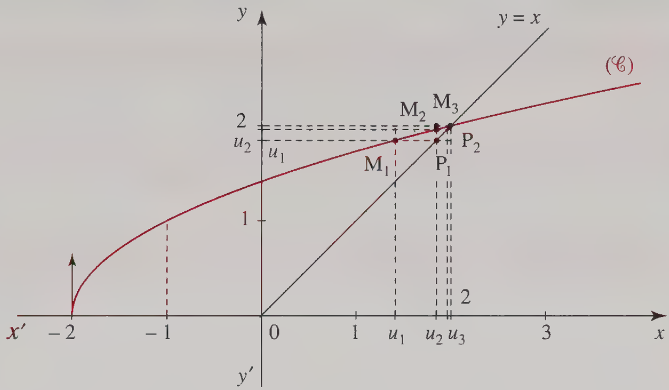
Les variations de la fonction f sont résumées dans le tableau suivant :

x	-2	$+\infty$
$2 + x$	0 ↗	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{2 + x}$	0 ↗	$+\infty$

De plus, on a :

$$y = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 + x \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 - 2 \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

la courbe $(\mathscr{C})$ est donc portée par la parabole d'équation $x = y^2 - 2$, parabole qui admet l'axe des x pour axe de symétrie.



Construisons alors les points M_{n-1} de coordonnées $(u_{n-1}, u_n = f(u_{n-1}))$, c'est-à-dire les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisse u_{n-1}. Le point M_1 est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $u_1 = \sqrt{2}$, et le point M_2 est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $u_2 = f(u_1)$ donc, pour obtenir M_2, on trace la parallèle à $(x'x)$ issue de M_1, elle coupe la première bissectrice en $P_1(u_2, u_2)$ et M_2 est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la parallèle à $(y'y)$ issue de P_1. De même, pour obtenir M_2, on trace la parallèle à $(x'x)$ issue de M_2, elle coupe la première bissectrice en $P_2(u_3, u_3)$ et M_3 est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la parallèle à $(y'y)$ issue de P_2, et ainsi de suite. Les points M_{n-1} tendent à se rapprocher du point d'intersection I de $(\mathscr{C})$ avec la première bissectrice : or les coordonnées $(x\,;\,y)$ de ce point sont les solutions du système.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{2+x}, \end{cases}$$

système équivalent à :

$$\begin{cases} y = x \\ y^2 = 2 + x, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou encore à} \quad \begin{cases} y = x \\ x^2 - x - 2 = 0\,. \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Le point I limite des points $M_{n-1}(u_{n-1}, u_n)$ a donc pour coordonnées $x = y = 2$, et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

Remarque : Il semble, en regardant ce dessin, que la suite (u_n) soit strictement croissante, ce qui pourrait effectivement se démontrer.

9 **1.** En calculant u_n pour $n = 1, 2, \ldots, 17$ à l'aide d'un tableur, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	2	1,5	1,666 7	1,6	1,625

n	6	7	8	9	10	11
u_n	1,615 4	1,619	1,617 6	1,618 2	1,618 0	1,618 1

n	12	13	14	15	16	17
u_n	1,618 03	1,618 04	1,618 033	1,618 034 5	1,618 033 8	1,618 034 1

2. La suite (u_n) est définie dans $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs. Ce résultat se démontre immédiatement par récurrence.

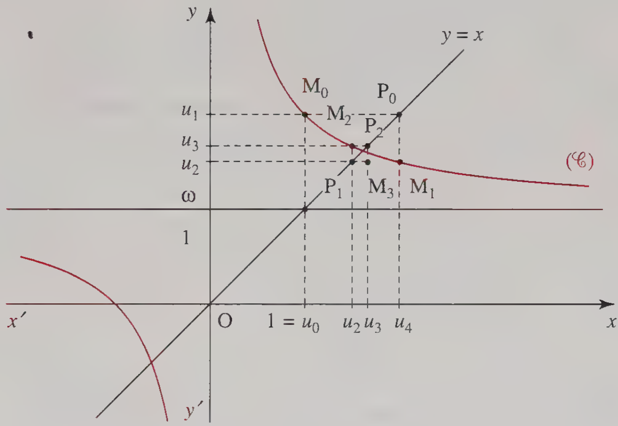
3. Construction de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ et des points $M_{n-1}(u_{n-1}, u_n)$.

Les variations de la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Construisons alors, dans un plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, cette courbe est une hyperbole d'asymptotes les droites $x = 0$ et $y = 1$ et de centre de symétrie le point $\omega(0\,;\,1)$.

Les points $M_{n-1}(u_{n-1}, u_n = f(u_{n-1}))$ sont alors les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisse u_{n-1}. Le point M_0 est donc le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $u_0 = 1$, et le point $M_1(u_1 = f(u_0), u_2)$ s'obtient en traçant la parallèle à $(x'x)$ issue de M_0 ; elle coupe la première bissectrice en $P_0(u_1, u_1)$ et M_1 est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la parallèle à $(y'y)$ issue de P_0, et ainsi de suite.



En regardant ce dessin, il semble que les points M_{n-1} tendent à se rapprocher du point d'intersection I de $(\mathscr{C})$ avec la partie de la première bissectrice située dans le premier quadrant. Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de ce point sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y = x \\ y = 1 + \dfrac{1}{x} \end{cases} \quad \text{système équivalent à} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y = x \\ x^2 - x - 1 = 0, \end{cases}$$

on a donc $x = y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; on peut alors penser à la vue de ce dessin que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont des suites adjacentes de limites $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est ce que nous allons montrer dans la question suivante.

4. Étude de la suite (u_n)

Considérons les suites $(v_p) = (u_{2p})$ et $(w_p) = (u_{2p+1})$, nous allons montrer que (v_p) est une suite strictement positive, majorée par $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et croissante, et que (w_p) est une suite strictement positive, minorée par $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et décroissante.

Les suites (v_p) et (w_p) sont strictement positives puisqu'elles sont extraites de la suite (u_n) qui est strictement positive. Par ailleurs, on a :

$$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u_{n-2}}} = \frac{2u_{n-2} + 1}{u_{n-2} + 1}$$

$$u_n = \frac{2(u_{n-2} + 1) - 1}{u_{n-2} + 1} = 2 - \frac{1}{u_{n-2} + 1},$$

les suites (v_p) et (w_p) sont donc respectivement définies par :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 = 1 \\ v_p = 2 - \dfrac{1}{1 + v_{p-1}}, \quad p \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = u_1 = 2 \\ w_p = 2 - \dfrac{1}{1 + w_{p-1}}, \quad p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

La suite (v_p) est bien majorée par $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, en effet :

• on a $v_0 = 1$ donc $v_0 < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$;

• supposons que l'on ait pour un entier $p - 1$, $(p - 1 \geqslant 0)$,

$v_{p-1} < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on a alors successivement $0 < 1 + v_{p-1} < 1 + \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

$$\frac{1}{1 + v_{p-1}} > \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{soit} \quad -\frac{1}{1 + v_{p-1}} < -\frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

donc : $v_p < 2 - \dfrac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ soit $v_p < 2 - \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}}$, ou encore $v_p < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

La suite (v_p) est donc majorée par $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On démontrerait de même par récurrence, que la suite (w_p) est minorée par $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Enfin on a :

$$u_n - u_{n-2} = \frac{2u_{n-1} + 1}{u_{n-2} + 1} - u_{n-2} = \frac{-u_{n-2}^2 + u_{n-2} + 1}{u_{n-2} + 1}$$

$$= -\frac{\left(u_{n-2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(u_{n-2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}{u_{n-2} + 1}$$

et, par conséquent,

$$v_p - v_{p-1} = -\frac{\left(v_{p-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(v_{p-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{v_{p-1}+1} \geqslant 0$$

$$w_p - w_{p-1} = \frac{\left(w_{p-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(w_{p-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{w_{p-1}+1} \leqslant 0.$$

Finalement, la suite (v_p) est une suite croissante, majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc convergente et sa limite l vérifie $l \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et la suite (w_p) est une suite décroissante, minorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc convergente et sa limite l' vérifie $l' \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Par ailleurs, on a : $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ donc $w_p = 1 + \frac{1}{v_p}$ et $v_{p+1} = 1 + \frac{1}{w_p}$, et la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; on a donc :

$$l' = 1 + \frac{1}{l} \quad \text{et} \quad l = 1 + \frac{1}{l'}$$

soit $ll' + l + 1 = l' + 1$, donc

$$l = l' \quad \text{et} \quad l^2 - l - 1 = 0, \quad \text{ou encore} \quad l = l' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc bien $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = \lim\limits_{p\to+\infty} w_p$ et, par conséquent, les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont des suites adjacentes de limite $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et on a :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Remarque : On a $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803399$, les calculs du **1.** nous montrent donc que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent assez vite vers leur limite commune.

10 **1.** On a :

$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^n b^{n-p-1} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})$, donc a et b étant strictement positifs, $(b^n - a^n)$ est du signe de $(b-a)$, et on a : $b^n > a^n$ si, et seulement si, $b > a$ ($b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$).

2. **Relation (1) :** $(1+a)^n > 1 + na$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Nous allons démontrer cette relation par récurrence : elle est vraie pour $n = 2$, en effet, on a :

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \quad \text{donc} \quad (1+a)^2 > 1 + 2a.$$

Supposons que la relation (1) soit vraie pour l'entier naturel n $(n \geqslant 2)$ et démontrons-la pour $(n+1)$; on a :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$$

donc, compte tenu de l'hypothèse,

$$(1+a)^{n+1} > (1+na)(1+a),$$

(puisque $1 + a > 0$), soit :

$$(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a + na^2$$

donc $$(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a.$$

La relation (1) est bien vérifiée pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

3. a. On obtient, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

n	2	3	4	5	6	7
$u_n = \sqrt[n]{2}$	1,414 2	1,259 9	1,189 2	1,148 7	1,122 5	1,104 1

n	8	9	10	11	12	13
$u_n = \sqrt[n]{2}$	1,090 5	1,080 1	1,071 8	1,065 0	1,059 5	1,054 8

n	14	15	16	17	18	19	20
$u_n = \sqrt[n]{2}$	1,050 8	1,047 3	1,044 3	1,041 6	1,039 3	1,037 2	1,035 3

b. D'après le **1.**, deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs puissances $n^{\text{ième}}$ $(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$, par conséquent, $\sqrt[n]{2}$ et 1 sont rangés dans le même ordre que $(\sqrt[n]{2})^n$ et 1^n, c'est-à-dire, dans le même ordre que 2 et 1, on a donc bien :

$$\sqrt[n]{2} > 1.$$

Donc, la suite (u_n) est minorée par 1.

On a : $(u_{n+1})^{n(n+1)} = ((u_{n+1})^{n+1})^n = ((\sqrt[n+1]{2})^{n+1})^n = 2^n$

$$(u_n)^{n(n+1)} = ((\sqrt[n]{2})^n)^{n+1} = 2^{n+1}$$

or on a $2^n < 2^{n+1}$ soit :

$$(u_{n+1})^{n(n+1)} < (u_n)^{n(n+1)} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < u_n,$$

donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

c. La suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 1$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée est convergente. Nous voulons de plus montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Puisque $\sqrt[n]{2} > 1$, on peut écrire $\sqrt[n]{2} = 1 + a$ avec $a > 0$.

Alors, en utilisant la relation (1), on obtient $(1+a)^n > 1 + na$ avec $(1+a)^n = 2$ et $1 + na = 1 + n(\sqrt[n]{2} - 1)$ donc $2 > 1 + n(\sqrt[n]{2} - 1)$ donc $1 > n(\sqrt[n]{2} - 1)$ donc $0 < \sqrt[n]{2} - 1 < \dfrac{1}{n}$.

Par encadrement, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Remarque : Les calculs faits au **3. a.** nous montrent que la suite (u_n) ne converge pas rapidement vers sa limite.

11 **1. a.** Nous avons : $A_1 = 0{,}8a_1$ soit $\boldsymbol{A_1 = 800}$ et $J_1 = 2a_1$ soit $\boldsymbol{J_1 = 2\,000}$.
$a_2 = 0{,}5A_1 + 0{,}4J_1$ soit $a_2 = 400 + 800$ donc $\boldsymbol{a_2 = 1\,200}$ et $A_2 = 0{,}8a_2$ soit $\boldsymbol{A_2 = 960}$ et $J_2 = 2a_2$ soit $\boldsymbol{J_2 = 2\,400}$.
De même, $a_3 = 0{,}5A_2 + 0{,}4J_2$ soit $a_3 = 480 + 960$ donc $\boldsymbol{a_3 = 1\,440}$ puis $\boldsymbol{A_3 = 1\,152}$ et $\boldsymbol{J_3 = 2\,880}$.

b. Nous avons : pour tout entier n non nul, $a_{n+1} = 0{,}5A_n + 0{,}4J_n$ avec $A_n = 0{,}8a_n$ et $J_n = 2a_n$. Nous en déduisons $a_{n+1} = 0{,}5 \times 0{,}8a_n + 0{,}4 \times 2a_n$ soit $\boldsymbol{a_{n+1} = 1{,}2a_n}$.
Pour tout entier n non nul, $J_{n+1} = 2a_{n+1}$ soit $J_{n+1} = 1{,}2 \times 2a_n$ donc $\boldsymbol{J_{n+1} = 1{,}2J_n}$ et $A_{n+1} = 1{,}2 \times 0{,}8a_n$ soit $\boldsymbol{A_{n+1} = 1{,}2A_n}$.
Les suites a, A et J sont des suites géométriques de raison 1,2.

c. Au bout de la onzième saison de reproduction, il s'est déroulé 10 années.

Nous avons : $a_{11} = a_1 \times (1{,}2)^{10}$ soit $a_{11} = 1\,000 \times (1{,}2)^{10}$ donc $\boldsymbol{a_{11} = 6\,191}$.

$A_{11} = A_1 \times (1{,}2)^{10}$ soit $A_{11} = 800 \times (1{,}2)^{10}$
donc $\boldsymbol{A_{11} = 4\,953}$

$J_{11} = J_1 \times (1,2)^{10}$ soit $J_{11} = 2\,000 \times (1,2)^{10}$

donc $\boldsymbol{J_{11} = 12\,383}$.

Les résultats sont arrondis à l'entier inférieur.

d. La somme $A_n + J_n$ représente la population totale l'année n.

e. Pour tout entier n non nul, $A_{n+1} + J_{n+1} = 1,2A_n + 1,2J_n$ soit $A_{n+1} + J_{n+1} = 1,2(A_n + J_n)$ donc **la suite $A + J$ est une suite géométrique de raison 1,2.**

2. a. La suite a étant une suite géométrique de raison 1,2 (> 1) et de premier terme positif, elle est **strictement croissante**.

b. $(1,2)^{13} \approx 10,7$ et $a_{14} = 1,2a_{13}$ avec $a_{13} = (1,2)^{13} \times a_1$ or $(1,2)^{13} > 10$ donc $a_{14} > 10a_1$. Cela signifie que **la population d'adultes au bout de 14 années est supérieure à dix fois la population initiale d'adultes**.

Pour tout entier naturel n, $a_{n+13} = (1,2)^{13} \times a_n$ or $(1,2)^{13} > 10$ donc $a_{n+13} > 10a_n$. **En les années n et $(n + 13)$, la population d'adultes a plus qu'été multipliée par dix**.

c. Nous avons : pour que $a_n > 1\,000a_1$, il suffit que $(1,2)^n a_1 > 1\,000a_1$ soit que $(1,2)^n > 1\,000$. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur nous obtenons $(1,2)^{37} \approx 850,56225$ et $(1,2)^{38} \approx 1\,020,6747$ donc après 38 années, nous aurons $\boldsymbol{a_n > 1\,000a_1}$.

d. La suite a tend vers l'infini lorsque n augmente indéfiniment.

BAC *L'épreuve*

12 Soit f : $[0\ ,+\infty[\ \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) = 4x^2 e^{-x}.$$

1. u_1 représente l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, en unités d'aire.

a. u_1 est le plus proche de 2.

u_5 représente l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

Nous avons : $\boldsymbol{0 < u_5 < 1}$.

b. La suite n'est pas croissante, car u_1 est proche de 2 et u_5 est inférieur à 1. Or si (u_n) était croissante, nous devrions avoir $u_5 \geqslant u_1$.

2. a. f est positive sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$, car, pour tout $x \geqslant 0$, $4x^2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$: $f'(x) = 8xe^{-x} + 4x^2(-e^{-x})$

$$f'(x) = 8xe^{-x} - 4x^2e^{-x}$$

$$f'(x) = 4xe^{-x}(2-x).$$

Pour tout $x \geqslant 2$, $4xe^{-x} > 0$ et $2 - x \leqslant 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$.

f est décroissante sur l'intervalle $[2\,,+\infty[$.

3. a. $u_{10} = \int_{10}^{11} 4x^2e^{-x}\,dx$ **par construction de la suite (u_n).**

b. Nous savons que f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ donc :

pour $10 \leqslant x \leqslant 11$, nous avons $f(11) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$.

c. D'après les propriétés de l'intégration (ordre et intégration) nous avons :

$$\int_{10}^{11} f(11)\,dx \leqslant \int_{10}^{11} f(x)\,dx \leqslant \int_{10}^{11} f(10)\,dx$$

$$\int_{10}^{11} f(11)\,dx = f(11)\int_{10}^{11} 1\,dx \text{ et } \int_{10}^{11} 1\,dx = [x]_{10}^{11} = 1$$

$$\int_{10}^{11} f(10)\,dx = f(10)\int_{10}^{11} 1\,dx \text{ et } \int_{10}^{11} 1\,dx = 1.$$

D'où $\quad f(11) \leqslant \int_{10}^{11} f(x)\,dx \leqslant f(10).$

Soit $\quad f(11) \leqslant u_{10} \leqslant f(10).$

Or $\quad f(11) = 484e^{-11}$ et $f(10) = 400e^{-10}$

$f(11) \approx 0{,}0081$ à 10^{-4} près, $f(10) \approx 0{,}0182$ à 10^{-4} près.

Une approximation décimale à 10^{-2} près de u_0 est 0,01.

13 **1. a.** $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+n+1}$.

b. $h\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$ car $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$, et $\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n+1}$.

2. a. $h'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$.

b. h est croissante sur [0 ; 1].

3. a. $0 \leqslant v_p \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1$. Or h est croissante sur [0 ; 1] donc :

$0 \leqslant h(v_p) \leqslant h\left(\frac{1}{p}\right)$ soit $0 \leqslant v_{p+1} \leqslant \frac{1}{p+1}$ d'après **1. b.**

b. *Démonstration par récurrence :*
Pour $n = 1$, $v_1 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$.
Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre p et démontrons-la à l'ordre $p + 1$. D'après **3. a.**, nous savons que $0 \leqslant v_p \leqslant \frac{1}{p}$ donc :

$$0 \leqslant v_{p+1} \leqslant \frac{1}{p+1}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

7 Géométrie dans l'espace

1 Produit scalaire dans l'espace

■ L'espace étant muni d'une base orthonormale,

pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.
Étant donné un plan P, tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, où M et N sont deux points de P, est appelé vecteur **normal** à P.

■ Soit O un point de l'espace E et $\vec{u}$ un vecteur non nul, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = 0$ est un plan P.

- Étant donné un plan P, il existe au moins un vecteur $\vec{u}$, non nul, tel que P soit l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = 0$.
- Deux plans sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont colinéaires.
- Deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

■ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

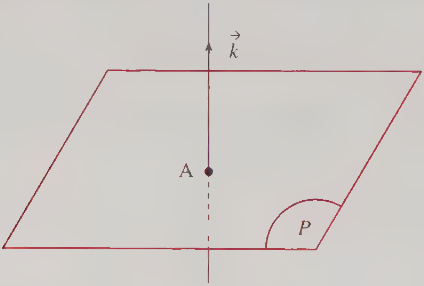
Les plans admettant $\vec{u}$ pour vecteur normal sont les plans d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel quelconque.

La distance du point $I(x_0, y_0, z_0)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2 Caractérisation d'un plan dans l'espace

- Soit A un point de l'espace et $\vec{k}$ un vecteur.

Alors l'ensemble des points M qui vérifient $\vec{k} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est exactement le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{k}$.



MÉTHODES

1 Comment déterminer un vecteur normal à un plan (*P*) ?

- En utilisant une équation cartésienne du plan de la forme $ux + vy + wz + h = 0$:

alors $\vec{n}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

2 Comment montrer que quatre points A, B, C, D distincts deux à deux sont coplanaires ?

- En montrant que (AC) et (BD), par exemple, sont sécantes ou parallèles.
- En montrant qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$.

PIÈGES À ÉVITER

1 Questions, affirmations...

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier la réponse avec précision.

1. Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ et α une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Alors : **a.** $\cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$; **b.** $\cos\alpha = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$;

c. le plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$ admet pour équation $x + y = 0$;

d. le plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$ admet pour équation $x + y + z = 0$.

2. Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $P(0; 1; -1)$, $Q(1; 2; 1)$ et $R(1; 1; 1)$. Alors :

a. $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux ;

b. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 3$ est un plan dont $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur normal.

3. Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points de coordonnées respectives $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(0; 0; 3)$ et, pour tout réel α, le système $S(\alpha)$ de points pondérés : $\left\{\left(A, \dfrac{4-\alpha}{6}\right); \left(B, \dfrac{1-\alpha}{3}\right); \left(C, \dfrac{\alpha}{2}\right)\right\}$. Alors :

a. une équation du plan (ABC) est $x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{2}{3}z - 2 = 0$;

b. le centre de gravité du triangle ABC est le barycentre d'un système $S(\alpha)$;

c. pour tout réel α, le système $S(\alpha)$ admet un barycentre ;

d. l'ensemble des barycentres des systèmes $S(\alpha)$, lorsque α décrit $\mathbb{R}$, est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$.

2 Réponses

1. **a.** Vrai **b.** Faux ; **c.** Vrai ; **d.** Faux.

2. **a.** Faux ; **b.** Vrai.

3. **a.** Vrai ; **b.** Faux ; **c.** Vrai ; **d.** Vrai.

SUJETS Se préparer à l'examen

EXO 1 Exercices d'application

1 Soit $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace E. Calculer :

a. $(3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k})^2$;

b. $\|-5\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}\|$;

c. $\|-5\vec{i}\| + \|\vec{j}\| + \|-6\vec{k}\|$;

d. $(3\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot 7\vec{k}$.

2 Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace muni de la base $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Soit $\vec{V} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{W} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{Z} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Soit $\overrightarrow{V'} = -5\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$, $\overrightarrow{W'} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$ et $\overrightarrow{Z'} = 4\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$.

Déterminer a et b tels que :

a. $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ colinéaires ; **b.** $\vec{W}$ et $\overrightarrow{W'}$ colinéaires ; **c.** $\vec{Z}$ et $\overrightarrow{Z'}$ colinéaires.

3 Soit $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace E.

Soit $A(2\ ;0\ ;-2)$, $B(\sqrt{2}\ ;2\ ;\sqrt{2})$ et $C(-\sqrt{2}\ ;-2\ ;-\sqrt{2})$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4 L'espace étant rapporté au repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a. $A(1\ ;-2\ ;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$;

b. $A(0\ ;1\ ;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

c. $A(2\ ;-3\ ;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

5 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Soit à déterminer dans l'espace une équation cartésienne du plan P passant par les trois points $A(1\ ;-2\ ;0)$, $B(1\ ;0\ ;1)$ et $C(3\ ;2\ ;1)$.

1. Vérifier que ces trois points ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur. Quelles relations doivent vérifier a, b et c pour que l'on ait $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad (*)$

Montrer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur vérifiant (*).

En déduire que ce vecteur est un vecteur normal à P.

3. Écrire alors une équation cartésienne de P.

6 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient les points A, B, C de coordonnées respectives $(2\,;-1\,;-1)$, $(1\,;1\,;1)$ et $(3\,;2\,;0)$.

1. Montrer que le triangle AOB est rectangle en O.

2. Calculer la distance AB.

3. Déterminer une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.

EXOS Exercices de synthèse

7 Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace E.

1. Soit M un point de E.

Préciser $\overrightarrow{u_M} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.

2. Trouver l'ensemble des points M de E tels que :

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$,
O étant un point donné.

8 L'espace E est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(1\,;-2\,;-4)$ et $A'(2\,;-5\,;5)$ deux points de E.

Posons : $\vec{V} = 2\vec{i} + (m+3)\vec{j} + (9-m)\vec{k}$

$\vec{V'} = \vec{i} + (m+1)\vec{j} + 4m\vec{k}$.

Soit (D) et (D') les droites définies par $(A, \vec{V})$ et $(A', \vec{V'})$.
Indiquer pour quelles valeurs du paramètre m :

a. (D) et (D') sont parallèles ;

b. (D) et (D') sont sécantes ;

c. (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

9 Dans l'espace E rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points : $A(6\,;-6\,;6)$, $B(-6\,;0\,;6)$, $C(-2\,;-2\,;11)$.

Soit (S) la sphère de centre B passant par A.

1. Déterminer une équation du plan (Q) tangent à (S) en A.

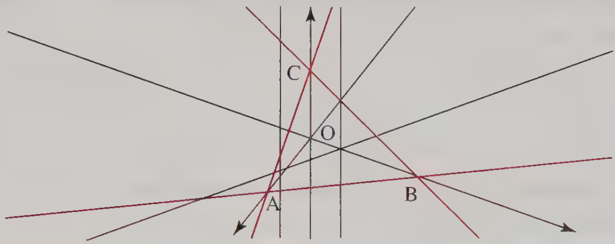
2. Déterminer les coordonnées du point D, projection orthogonale de C sur (Q).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AD) et (BC).

BAC L'épreuve

10 L'espace est muni d'un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal.

Représenter ce repère sur votre copie en prenant pour unité sur chaque axe 2cm.



1. On donne le plan (P) d'équation $2x + 2y + 3z = 6$.

a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C intersections du plan (P) avec les axes du repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b. Tracer les droites d'intersection du plan (P) avec les plans de coordonnées du repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. On considère le plan (Q) d'équation $x + 2y = 2$.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersections du plan (Q) avec les axes du repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quand ceux-ci existent.

b. Tracer les droites d'intersection du plan (Q) avec les plans de coordonnées du repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c. Tracer l'intersection des deux plans (P) et (Q).

3. On donne les points $D(1\,;0\,;0)$, $E(0\,;-4\,;0)$ et $F(0\,;0\,;4)$.

a. Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.

b. Calculer les coordonnées du point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R).

11 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$. I, J et K sont les milieux respectifs de $[EF]$, $[FB]$ et $[AD]$.

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée ci-après. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0 ; 4)$, $(2 ; 0 ; 2)$ et $(0 ; 3 ; 0)$.

2. Soit (P_1) le plan d'équation $y = 0$ et (P_2) le plan d'équation $2x + z = 6$.

a. Donner un vecteur $\vec{n_1}$ normal au plan (P_1) et un vecteur $\vec{n_2}$ normal au plan (P_2).

b. En déduire que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

c. Soit (Δ) l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2).
Montrer que (Δ) est la droite (IJ).

3. Soit $\vec{n}(2 ; 2 ; 1)$.

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

b. En déduire que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

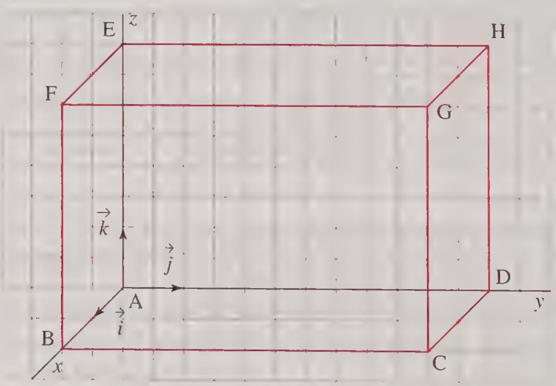
c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.

4. On considère le plan (P) d'équation $5x + y = 5$.

a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan (P) avec les axes (Ax) et (Ay) respectivement.

b. Vérifier que le point I appartient au plan (P).

c. Sur la figure, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan (P) sur le plan (xAy).



12 L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les six points suivants sont définis par leurs coordonnées :
$A(1\ ;-1\ ;3)$; $B(1\ ;1\ ;3)$; $C(1\ ;1\ ;-3)$; $A'(19\ ;-1\ ;3)$; $B'(19\ ;1\ ;3)$; $C'(19\ ;1\ ;-3)$.

Aucune figure n'est exigible.

1. a. Montrer que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Établir que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est normal au plan (ABC).

c. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).

d. Les quatre points A, B, B′ et C sont-ils coplanaires ?

2. a. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

b. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

3. a. Démontrer que les trois points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.

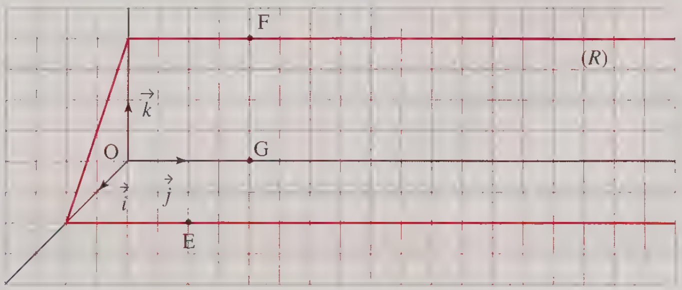
b. Les plans (ABC) et (A′B′C′) sont-ils sécants ou parallèles ? Justifier votre réponse.

4. a. Calculer les longueurs des segments [AB], [BC] et [AA′] notées respectivement l_0, l_1 et l_2.

b. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite arithmétique ? Si oui, donner la raison.

c. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui, donner la raison.

13 L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ représenté sur le document ci-dessous. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation $x + z = 2$.



1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives : A(6 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6).

a. Placer les points A, B, C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; 1).

Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) passant par A, B et C.

d. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières.

Le point G est situé sur l'axe $(O ; \vec{j})$, le point E est dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et le point F dans le plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} y = 2 \\ x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

e. Représenter cet ensemble sur la figure page précédente.

3. On considère le système S de 3 équations à 3 inconnues x, y, z :

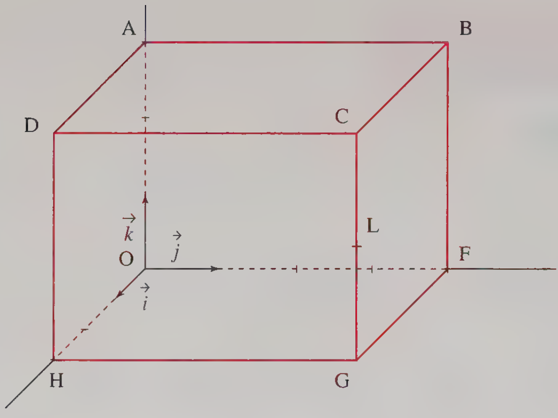
$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \\ x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points du plan (R) dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

14 L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ABCDOFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{OH} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{OF} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = 3\vec{k}$.

Soit L le milieu de [CG].



1. On considère l'ensemble (Π) des points dont les coordonnées x, y et z vérifient : $4x - 3y + 8z - 12 = 0$.

a. Parmi les points A, B, O, G, H, L, lesquels appartiennent à (Π) ?

b. Justifier que l'ensemble (Π) est le plan (BLH).

2. a. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (BLH).

b. Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Montrer que (Δ) est l'ensemble des points M tels que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \\ \text{et} \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BL} = 0. \end{cases}$

En déduire un système d'équations caractérisant la droite (Δ).

c. Montrer que le point de coordonnées $\left(-\dfrac{48}{89} ; \dfrac{36}{89} ; \dfrac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ) et à (Π).

CORRIGÉS

EXOS Exercices d'application

1 **a.** $(3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})^2 = \|3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}\|^2$

$(3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})^2 = 9+16+49.$

Soit : $\mathbf{(3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})^2 = 74.}$

b. $\|-5\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}\| = \sqrt{25+1+36}$, soit $\mathbf{\|-5\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}\| = \sqrt{62}.}$

c. $\|-5\vec{i}\| + \|\vec{j}\| + \|-6\vec{k}\| = 5\|\vec{i}\| + \|\vec{j}\| + 6\|\vec{k}\|.$

Or $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$

Donc : $\mathbf{\|-5\vec{i}\| + \|\vec{j}\| + \|-6\vec{k}\| = 12.}$

d. $(3\vec{i}-4\vec{j})\cdot 7\vec{k} = 21\,\vec{i}\cdot\vec{k} - 28\,\vec{j}\cdot\vec{k}.$

Or $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ et $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, donc $\mathbf{(3\vec{i}-4\vec{j})\cdot 7\vec{k} = 0.}$

2 **a.** Puisque $\vec{V} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires s'il existe un réel k' tel que $\vec{V'} = k'\vec{V}$, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} -5 = -3k' \\ a = 2k' \\ b = k' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dfrac{5}{3} = k' \\ a = \dfrac{10}{3} \\ b = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Pour $a = \dfrac{10}{3}$ et $b = \dfrac{5}{3}$, $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires avec $\vec{V'} = \dfrac{5}{3}\vec{V}$.

b. Puisque $\vec{W} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{W'}$ sont colinéaires s'il existe un réel k' tel que $\vec{W'} = k'\vec{W}$, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} a = 4k' \\ 2 = 3k' \\ b = k' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} = k' \\ a = \dfrac{8}{3} \\ b = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Pour $a = \dfrac{8}{3}$ et $b = \dfrac{2}{3}$, $\vec{W}$ et $\vec{W'}$ sont colinéaires avec $\vec{W'} = \dfrac{2}{3}\vec{W}$.

c. Puisque $\vec{Z} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{Z}$ et $\vec{Z'}$ sont colinéaires s'il existe un réel k' tel que $\vec{Z'} = k'\vec{Z}$, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} 4 = -2k' \\ a = 3k' \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -2 = k' \\ a = -6 \\ b = 0. \end{cases}$$

Pour $a = -6$ et $b = 0$, $\vec{Z}$ et $\vec{Z'}$ sont colinéaires avec $\vec{Z'} = -2\vec{Z}$.

3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [(\sqrt{2}-2)\vec{i} + 2\vec{j} + (\sqrt{2}+2)\vec{k}] \cdot [(-\sqrt{2}-2)\vec{i} - 2\vec{j}]$
$+ (-\sqrt{2}+2)\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}-2)(-\sqrt{2}-2) - 4 + (\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4-2) - 4 + (4-2) = 0.$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc $\mathbf{\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}}$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2 + 4 + (\sqrt{2}+2)^2}$, soit $\mathbf{\|\overrightarrow{AB}\| = 4}$.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-\sqrt{2}-2)^2 + 4 + (2-\sqrt{2})^2}$, soit $\mathbf{\|\overrightarrow{AC}\| = 4}$.

Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

4 **a.** Une équation cartésienne de P est donnée par $x + y - 3z + d = 0$, or le point $A(1\,;-2\,;1)$ appartient à P, donc $1 - 2 - 3 + d = 0$, soit $d = 4$.
Une équation cartésienne de *P* est $x + y - 3z + 4 = 0$.

b. Une équation cartésienne de P est donnée par $x + d = 0$, or le point $A(0\,;1\,;1)$ appartient à P, donc $d = 0$.
Une équation cartésienne de *P* est $x = 0$ (il s'agit du plan $(O;\ \vec{j}, \vec{k})$).

c. Une équation cartésienne de *P* est donnée par $\mathbf{-x + 2z + d = 0}$; or le point $A(2\,;-3\,;0)$ appartient à P, donc $-2 + 0 + d = 0$, soit $\mathbf{d = 2}$.

5 **1.** Nous avons $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$, et ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc **les trois points A, B, C ne sont pas alignés.**

2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2b+c$; $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2a+4b+c$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ équivaut à :

$$\begin{cases}2b+c=0\\2a+4b+c=0\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}c=-2b\\2a+4b-2b=0\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}c=-2b\\a=-b.\end{cases}$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ vérifie bien les conditions trouvées précédemment. Il est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont pas colinéaires, donc ce vecteur est orthogonal à P, c'est un vecteur normal à P.

3. Une équation cartésienne de P est alors $x-y+2z+d=0$ et A appartient à P, donc $1+2+0+d=0$, soit $d=-3$.
Une équation cartésienne de P est $\boldsymbol{x-y+2z-3=0}$.

6 **1.** Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2-1-1=0$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux, autrement dit, **le triangle AOB est rectangle en O**.

2. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$,
par suite $\mathbf{AB}=\sqrt{1+4+4}=\mathbf{3}$.

3. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ de deux manières différentes.
À l'aide de l'expression analytique :

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2-2+2=2(*)$.

À l'aide du cosinus de la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$:
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\cos\widehat{ABC}$, on obtient avec $BA=3$ et $BC=\sqrt{6}$:
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times\sqrt{6}\times\cos\widehat{ABC}(**)$.

À l'aide de (*) et (**), nous avons $3\sqrt{6}\cos\widehat{ABC}=2$, soit $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, d'où : **une mesure de $\widehat{ABC}$ est environ 74°.**

EXOS Exercices de synthèse

7 **1.** Pour tout point M de E, $\overrightarrow{u_M} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{u_M} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{u_M}$ est un vecteur constant non nul car A, B, C ne sont pas alignés.

2. $M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

donc $M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = 0$

donc $M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_M} = 0$.
Nous reconnaissons la caractérisation vectorielle du plan (P) passant par O et admettant $\overrightarrow{u_M} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal.

8 **a.** (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{V'} = k\vec{V}$ puisque $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont non nuls. D'où :

$$\begin{cases} 2k = 1 \\ k(m+3) = m+1 \\ k(9-m) = 4m \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ m+3 = 2m+2 \\ 9-m = 8m \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = 1. \end{cases}$$

Par suite : $(D)//((D')$ **pour** $\boldsymbol{m = 1}$ **et** $\overrightarrow{V'} = \dfrac{1}{2}\vec{V}$.

b. Pour $m \neq 1$, les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes si, et seulement si, $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ ne sont pas colinéaires et si $\overrightarrow{AA'}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$.

Nous savons que, pour $m \neq 1$, $\vec{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ ne sont pas colinéaires.
Recherchons une autre condition sur m pour qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AA'} = \alpha\vec{V} + \beta\overrightarrow{V'}$.

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AA'} = \alpha\vec{V} + \beta\overrightarrow{V'}$ se traduit par :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ -3 = (m+3)\alpha + (m+1)\beta \\ 9 = (9-m)\alpha + 4m\beta \end{cases} \quad (1)$$

(1) s'écrit aussi : $\begin{cases} 1-2\alpha=\beta \\ -4-m=\alpha(m+3-2m-2) \\ 9-4m=\alpha(9-m-8m) \end{cases}$

ou encore : $\begin{cases} 1-2\alpha=\beta \\ \dfrac{-4-m}{1-m}=\alpha \text{ car } m\neq 1 \\ \dfrac{9-4m}{9-9m}=\alpha \end{cases}$

m doit vérifier : $\dfrac{-4-m}{1-m}=\dfrac{9-4m}{9-9m}$

c'est-à-dire : $9(-4-m)=9-4m$, soit $m=-9$.

Pour $m=-9$, nous avons : $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$ et $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}\vec{V}$.

(D) et (D') sont alors sécantes en A′, car $A'\in D$ et $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{V}$.

c. Pour $m\neq 1$ et $m\neq -9$, (D) et (D') ne sont ni parallèles ni sécantes, donc elles **ne sont pas coplanaires**.

9 **1.** Le plan (Q) tangent à (S) en A est, par définition, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y+6 \\ z-6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-12(x-6)+6(y+6)$.

Une équation cartésienne de (Q) est : $-12x+6y+108=0$

$\mathbf{-2x+y+18=0}$.

2. Un vecteur directeur de (CD) est un vecteur $\vec{n}$ normal à (Q).

Or le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Q). (CD) est donc la droite passant par $C(-2\,;-2\,;11)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

Une représentation paramétrique de (CD) est donnée par :

$$\begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 11. \end{cases}$$

De plus, le pied D de la perpendiculaire (CD) à (Q) est un point de (Q), donc ses coordonnées vérifient l'équation de (Q) et celle de (CD).
D est donc le point de (L) tel que λ vérifie :
$-2(-2-2\lambda)+(-2+\lambda)+18=0$
$4+4\lambda-2+\lambda+18=0$, soit $\lambda=-4$ D'où **D(6 ; –6 ; 11)**.

3. La droite (AD) a pour représentation paramétrique, compte tenu de

$$A(6\,;-6\,;6) \text{ et } \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -6 \quad k \in \mathbb{R}. \\ z = 6 + k \end{cases}$$

La droite (BC) a pour représentation paramétrique, compte tenu de

$$B(-6\,;0\,;6) \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x = -6 + 4k' \\ y = -2k', \quad k' \in \mathbb{R}. \\ z = 6 + 5k' \end{cases}$$

Soit K le point d'intersection, s'il existe, de (AD) et (BC). Ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient les représentations paramétriques de (AD) et (BC), donc s'il existe, k et k' tels que :

$$\begin{cases} 6 = -6 + 4k' \\ -6 = -2k' \\ 6 + k = 6 + 5k' \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} k' = 3 \\ k' = 3 \\ k = 15. \end{cases} \qquad \mathbf{K(6\,;-6\,;21)}.$$

BAC L'épreuve

10 **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit (P) le plan d'équation $2x+2y+3z=6$.

a. Le point d'intersection de (P) avec l'axe $(O\,;\vec{i})$ admet pour coordonnées $(x\,;0\,;0)$ et $2x+2\times0-3\times0=6$ équivaut à $x=3$.

Le point d'intersection A de (P) avec $(O\,;\vec{i})$ admet pour coordonnées (3 ; 0 ; 0).

Le point d'intersection B de (P) avec l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j})$ admet pour coordonnées $(0\ ;y\ ;0)$ et $2\times 0+2y+3\times 0=6$ équivaut à $y=3$.

Le point d'intersection B de (P) avec $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j})$ admet pour coordonnées $(0\ ;3\ ;0)$.

Enfin, nous avons, dans le cas où $x=0$ et $y=0$:
$2x+2y+3z=3z$ et $3z=6$ équivaut à $z=2$.

Le point d'intersection C de (P) avec $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ admet pour coordonnées $(0\ ;0\ ;2)$.

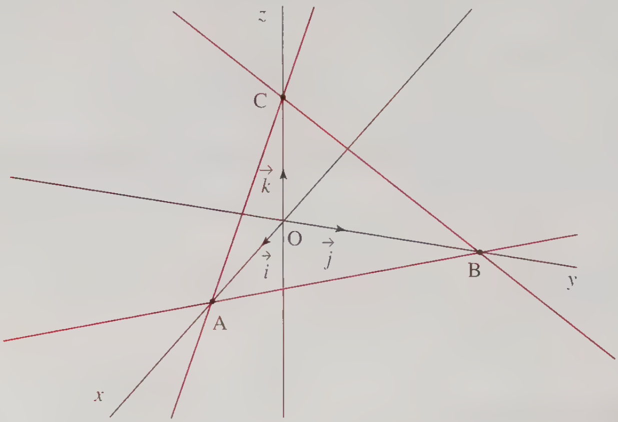
b. Des résultats précédents, on déduit que :

– la droite d'intersection de (P) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est la droite (AB) ;

– la droite d'intersection de (P) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{k})$ est la droite (AC) ;

– la droite d'intersection de (P) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j},\ \vec{k})$ est la droite (BC).

Représentation graphique :



2. Soit (Q) le plan d'équation $x+2y=2$.

a. Notons $(x\ ;0\ ;0)$ les coordonnées du point d'intersection de (Q) et de $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i})$. $x+2\times 0=2$ équivaut à $x=2$.

Le point d'intersection H du plan (Q) et de l'axe $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i})$ admet pour coordonnées $(2\ ;0\ ;0)$.

Soient $(0\ ;y\ ;0)$ les coordonnées du point d'intersection de (Q) et de $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j})$.

Puisque $0 + 2y = 2$ équivaut à $y = 1$, on en déduit que :

le point d'intersection I de (Q) et de $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j})$ admet pour coordonnées (0 ; 1 ; 0).

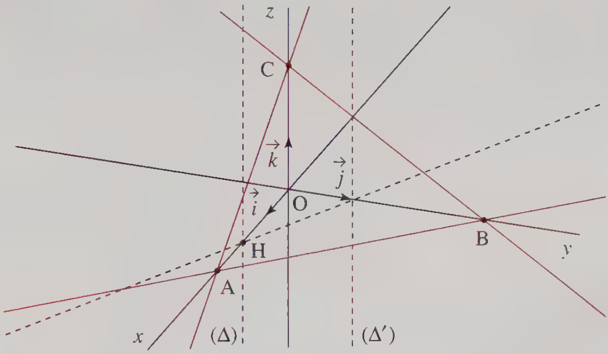
Un vecteur normal à (Q) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, donc la droite $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ est soit strictement parallèle à (Q) soit incluse dans (Q). Puisque $\mathrm{O}(0\ ;0\ ;0)$ n'appartient pas à (Q), on en déduit que **(Q) et $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ ne sont pas sécants.**

b. La droite d'intersection de (Q) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est la droite (HI).

Puisque (Q) et $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ sont parallèles, la droite d'intersection (Δ) de (Q) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{k})$ est la droite parallèle à $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ passant par H.

De même, la droite d'intersection de (Q) et du plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j},\ \vec{k})$ est la droite (Δ') parallèle à $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{k})$ passant par I.

Représentation graphique :



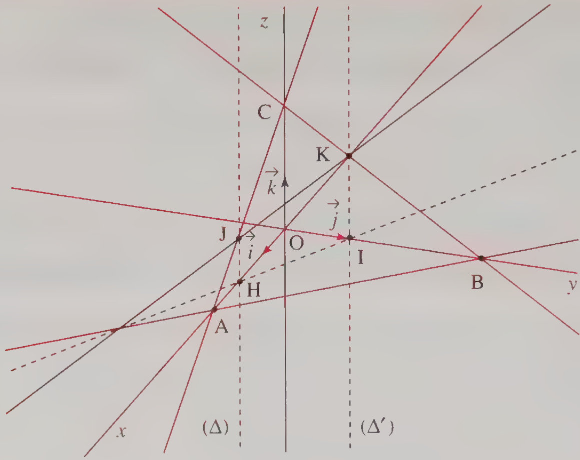
c. Les droites (Δ) et (AC) sont toutes deux incluses dans le plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{k})$ et sécantes en un point J.

J appartient à (P) puisque $\mathrm{J} \in (\mathrm{AB})$ et J appartient à (Q) puisque $\mathrm{J} \in (\Delta)$.

Par conséquent, J appartient à la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

Les droites (Δ') et (BC) sont incluses dans le plan $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j},\ \vec{k})$ et sont sécantes en un point K qui appartient à (P) et (Q), car $\mathrm{K} \in (\mathrm{BC})$ avec $(\mathrm{BC}) \subset (P)$ et $\mathrm{K} \in (\Delta')$ avec $(\Delta') \subset (Q)$.

On en déduit que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant la droite (JK).



3. Soient D, E et F les points de coordonnées respectives $(1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; -4 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 4)$.

a. Le plan (R) qui contient les points D, E, F admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où a, b, c et d sont quatre réels.

$\mathrm{D} \in (R)$ donc $\quad a \times 1 + b \times 0 + c \times 0 = d$ soit $a = d$.

$\mathrm{E} \in (R)$ donc $\quad a \times 0 + b \times (-4) + 4 \times 0 = d$ soit $-4b = d$

$$b = -\frac{1}{4}d.$$

Enfin, $\mathrm{F} \in (R)$ donc $\quad a \times 0 + b \times 0 + 4c = d$ soit $4c = d$

$$c = \frac{1}{4}d.$$

Une équation de (R) est : $dx - \frac{1}{4}dy + \frac{1}{4}dz = d$

soit $x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 1$ ou $\mathbf{4x - y + z = 4}$.

Une équation de (R) est $4x - y + z = 4$.

b. Le point d'intersection G des plans (P), (Q) et (R) admet pour coordonnées $(x ; y ; z)$ solution du système :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 6 \\ x + 2y = 2 \\ 4x - y + z = 4 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 6 \\ x + 2y = 2 \\ -10x + 5y = -6 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 6 \\ 25y = 14 \\ 25x = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \times \dfrac{22}{25} + 2 \times \dfrac{14}{25} + 3z = 6 \\ y = \dfrac{14}{25} \\ x = \dfrac{22}{25} \end{cases}$ $\begin{cases} z = \mathbf{\dfrac{26}{25}} \\ y = \mathbf{\dfrac{14}{25}} \\ x = \mathbf{\dfrac{22}{25}} \end{cases}$

G admet pour coordonnées $\left(\mathbf{\dfrac{22}{25}} ; \mathbf{\dfrac{14}{25}} ; \mathbf{\dfrac{26}{25}}\right)$.

11 **1.** L'espace est muni du repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
A admet pour coordonnées (0 ; 0 ; 0).

Nous avons $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ donc B admet pour coordonnées (2 ; 0 ; 0).

$\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ donc D admet pour coordonnées (0 ; 6 ; 0).

Enfin, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$ donc E admet pour coordonnées (0 ; 0 ; 4).

Puisque ABCDEFGH est un pavé, nous avons $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
Les coordonnées de $F(x_F ; y_F ; z_F)$ sont :

$$\begin{cases} x_F - 2 = 0 \\ y_F - 0 = 0 \\ z_F - 0 = 4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_F = 2 \\ y_F = 0 \\ z_F = 4 \end{cases}$$

F admet pour coordonnées (2 ; 0 ; 4).
Le milieu I de [EF] admet pour coordonnées :

$$\left(\frac{0+2}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{4+4}{2}\right) = (\mathbf{1} ; \mathbf{0} ; \mathbf{4}).$$

Et, J, milieu de [FB], **a pour coordonnées (2 ; 0 ; 2)**. Enfin, K est le milieu de [AD] avec A et D de coordonnées respectives (0 ; 0 ; 0) et (0 ; 6 ; 0), donc **K admet pour coordonnées (0 ; 3 ; 0)**. (Voir la figure ci-après).

2. Soient (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $y = 0$ et $2x + z = 6$.

a. Rappelons tout d'abord que tout plan (P) admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où a, b, c et d sont quatre réels et que, dans ce cas, un vecteur $\vec{n}$ normal à (P) admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal à (P_1) admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ normal à (P_2) admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Les plans (P_1) et (P_2) sont sécants si, et seulement si, (P_1) et (P_2) ne sont pas strictement parallèles, autrement dit, si, et seulement si, $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{n_1} = \alpha\,\overrightarrow{n_2}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} 0 = 2\alpha \\ 1 = 0 \\ 0 = 4\alpha \end{cases}$

ce qui est impossible donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et **les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite** (Δ).

c. Vérifions que $\mathrm{I} \in (P_1) \cap (P_2)$.

I admet pour coordonnées $(1 ; 0 ; 4)$ et une équation de (P_1) est $y = 0$, donc $\mathrm{I} \in (P_1)$.

$2 \times 1 + 4 = 6$, donc $\mathrm{I} \in (P_2)$ et $\mathrm{I} \in (\Delta)$.

De la même façon, l'ordonnée de J est égale à 0 donc $\mathrm{J} \in (P_1)$.

$2 \times 2 + 2 = 6$ donc $\mathrm{I} \in (P_2)$ et, par suite, $\mathrm{J} \in (\Delta)$.

Puisque I et J appartiennent à (Δ) on en déduit que $\boldsymbol{(\Delta) = (\mathrm{IJ})}$.

3. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et

$2 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times (-2) = 0$, donc, d'après la condition d'orthogonalité de deux vecteurs de l'espace, nous en déduisons que :

$\vec{n}$ **est orthogonal à** $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

$\overrightarrow{IK}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et l'on a :

$2 \times (-1) + 2 \times 3 + 1 \times (-4) = 0$, donc, d'après la condition d'orthogonalité de deux vecteurs de l'espace, nous en déduisons que :

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont non colinéaires (il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{IJ} = \alpha\overrightarrow{IK}$) et $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ qui sont deux vecteurs directeurs du plan (IJK), donc **$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).**

c. Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK), ce plan admet une équation de la forme $2x + 2y + z = \beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$. I appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation $2x + 2y + z = \beta$. Par suite :

$$2 \times 1 + 2 \times 0 + 4 = \beta$$
$$\beta = 6$$

et une équation cartésienne du plan (IJK) est $2x + 2y + z = 6$.

4. Soit (P) le plan d'équation $5x + y = 5$.

a. Tout point de (Ax) admet pour coordonnées $(x\,;0\,;0)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Le point R, intersection de (Ax) et de (P), admet pour ordonnée 0, pour cote 0, et son abscisse x est telle que :

$$5x + 0 = 5$$
$$x = 1$$

R admet pour coordonnées (1 ; 0 ; 0).

De la même façon, le point T, intersection de (Ay) et de (P), admet pour abscisse 0, pour cote 0, et son ordonnée y est telle que :

$$5 \times 0 + y = 5$$
$$y = 5.$$

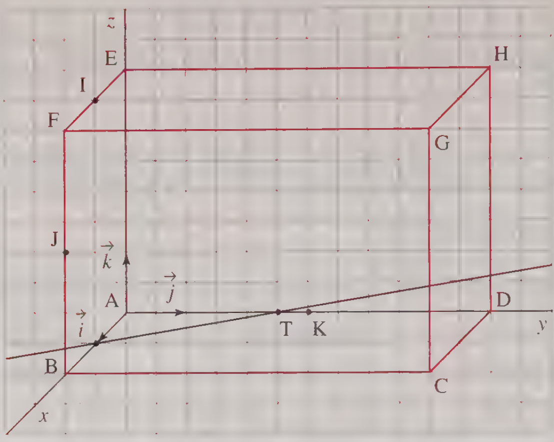
T admet pour coordonnées (0 ; 5 ; 0).

b. I admet pour coordonnées (1 ; 0 ; 4) et l'on a :

$$5 \times 1 + 0 = 5$$

donc I appartient à (P).

c. L'intersection de (P) et du plan (xAy) est la droite (RT) puisque $\{R\} = (P) \cap (Ax)$ et $\{T\} = (P) \cap (Ay)$. On en déduit la représentation graphique page suivante.



12 **1. a.** Nous avons : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix}$, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc **les points A, B et C ne sont pas alignés.**

b. $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}18\\0\\0\end{pmatrix}$ et la condition d'orthogonalité de deux vecteurs de l'espace donne $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AC}$ avec A, B et C non alignés donc :

le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est normal au plan (ABC) car il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

c. D'après le résultat précédent, nous avons : une équation cartésienne du plan (ABC) est $18x + d = 0$. Or, A appartient au plan (ABC), nous en déduisons que $18 + d = 0$ soit $d = -18$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 1 = 0$.

d. Le point $B'(19\ ;1\ ;3)$ n'est pas un point du plan (ABC) puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation $x - 1 = 0$. Il s'ensuit que :

les points A, B, B′ et C′ ne sont pas coplanaires.

2. a. Nous avons $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, donc :

le triangle ABC est rectangle en B.

b. Le point $D(a\,;b\,;c)$ tel que ABCD soit un rectangle doit vérifier $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ puisque ABC est déjà un triangle rectangle, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b+1=0 \\ c-3=-6 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-3. \end{cases}$$

Les coordonnées du point D tel que ABCD soit un rectangle sont : (1 ; –1 ; –3).

3. a. Nous avons : $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix}$, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{A'C'}$ donc :

les points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}18\\0\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix}$, c'est donc un vecteur normal au plan $(A'B'C')$.

Ce vecteur est aussi un vecteur normal au plan (ABC). Donc les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles ou confondus.

Or $B'\in(ABC)$ d'après la question **1. a.** donc :

les plans (ABC) et (A′B′C′) sont parallèles.

4. a. Nous avons : $AB=2$, $BC=6$ et $AA'=18$ donc :

$\boldsymbol{l_0=2,\ l_1=6,\ l_2=18.}$

b. Nous avons : $l_1=l_0+4$ et $l_2=l_1+12$ donc :

l_0, l_1, l_2 ne sont pas les trois premiers termes d'une suite arithmétique.

c. Nous avons : $l_0l_2=l_1^2$ donc :

l_0, l_1, l_2 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.

13 **1. a.** Voir figure à la fin du corrigé.

b. Nous avons : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$.

c. Nous avons : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -6+6=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à (AB) et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -6+6=0$; donc $\vec{n}$ est aussi orthogonal à (AC).

Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P) est un vecteur normal à (P).

d. Nous avons $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, donc une équation cartésienne de (P) est donnée par :

$$x+2y+z+d=0.$$

Or A(6 ; 0 ; 0) est un point de (P) donc : $6+0+0+d=0$ soit $d=-6$.

Une équation du plan (P) est $x+2y+z=6$.

2. a. Le plan (Q) étant parallèle au plan $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{k})$, le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ en est un vecteur normal et une équation cartésienne de (Q) est donnée par $y+m=0$. Or, le point G(0 ; 2 ; 0) appartient à (Q) donc $2+m=0$ soit $m=-2$.

Une équation du plan (Q) est alors $y=2$.

b. Nous avons : **G(0 ; 2 ; 0) ; E(2 ; 2 ; 0) et F(0 ; 2 ; 2).**

c. G n'appartient pas à (P) puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de (P).

E appartient à (P) puisque ses coordonnées vérifient l'équation de (P).

F appartient à (P) puisque ses coordonnées vérifient l'équation de (P).

Donc les points E et F sont des points de (P).

d. M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $\begin{cases} y=2 \\ x+2y+z=6 \end{cases}$ appartient à l'intersection des plans (Q) et (P) qui ne sont pas parallèles, donc cette intersection est une droite.

L'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant :

$\begin{cases} y=2 \\ x+2y+z=6 \end{cases}$ **est une droite.**

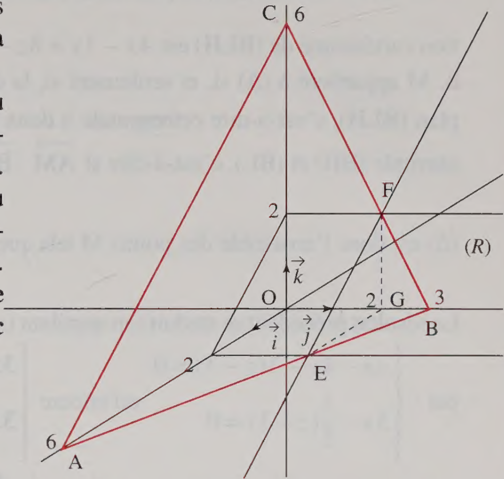
e. Les points E et F appartiennent aux plans (P) et (Q) donc **la droite d'intersection de (P) et (Q) est (EF).**

3. Soit le système S : $\begin{cases} x+z=2 \\ y=2 \\ x+2y+z=6. \end{cases}$ qui représente les coordonnées de l'ensemble des points appartenant à (R) et à (EF) (voir **2. e**).

Le point E appartient au plan (R) et ses coordonnées vérifient le système S.

Le point F appartient au plan (R) et ses coordonnées vérifient le système S.

La droite intersection de (R), (P) et (Q) est donc (EF).



14 **1. a.** Nous avons :

A(0 ; 0 ; 3) ; F(0 ; 4 ; 0) ; H(3 ; 0 ; 0) ; G(3 ; 4 ; 0) ;

B(0 ; 4 ; 3) ; C(3 ; 4 ; 3) ; D(3 ; 0 ; 3) et $L\left(3\ ;4\ ;\frac{3}{2}\right)$.

A n'appartient pas à (Π) car 0 – 0 + 24 – 12 n'est pas nul.

B appartient à (Π) car 0 – 12 + 24 – 12 = 0.

O n'appartient pas à (Π) car 0 – 0 + 0 – 12 n'est pas nul.

G n'appartient pas à (Π) car 12 – 12 + 0 – 12 n'est pas nul.

H appartient à (Π) car 12 – 0 + 0 – 12 = 0.

L appartient à (Π) car 12 – 12 + 12 – 12 = 0.

En conclusion, seuls les points B, H et L appartiennent à (Π).

b. Pour démontrer que (Π) est le plan (BLH), il suffit de montrer que ces trois points distincts ne sont pas alignés.

Or $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}3\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}3\\-4\\-3\end{pmatrix}$, et il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BL}$, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les points B, L et H ne sont pas alignés ; ils déterminent un unique plan qui est donc (Π).

(Π) est le plan (BLH).

2. a. Un vecteur normal au plan (BLH) est donné par $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ car une équation cartésienne de (BLH) est $4x - 3y + 8z - 12 = 0$.

b. M appartient à (Δ) si, et seulement si, la droite (AM) est orthogonale au plan (BLH), c'est-à-dire orthogonale à deux droites sécantes de (BLH), par exemple (BH) et (BL), c'est-à-dire si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BL} = 0$.

(Δ) est donc l'ensemble des points M tels que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BL} = 0. \end{cases}$

Le résultat précédent se traduit (en appelant $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées de M) :

par : $\begin{cases} 3x - 4y - 3(z-3) = 0 \\ 3x - \frac{3}{2}(z-3) = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \mathbf{3x - 4y - 3z = -9} \\ \mathbf{3x - \frac{3}{2}z = -\frac{9}{2}}. \end{cases}$

c. Montrons que le point de coordonnées $\left(-\frac{48}{89}\,;\frac{36}{89}\,;\frac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ).

Nous avons :

$$3 \times \left(-\frac{48}{89}\right) - 4 \times \left(\frac{36}{89}\right) - 3 \times \left(\frac{171}{89}\right) = -\frac{144}{89} - \frac{144}{89} - \frac{513}{89} = -\frac{801}{89}.$$

Soit -9.

$$3 \times \left(-\frac{48}{89}\right) - \frac{3}{2} \times \left(\frac{171}{89}\right) = -\frac{144}{89} - \frac{513}{178} = -\frac{801}{178} \text{ soit } -\frac{9}{2}.$$

Montrons que le point de coordonnées $\left(-\frac{48}{89}\,;\frac{36}{89}\,;\frac{171}{89}\right)$ appartient à (Π).

Nous avons :

$$4 \times \left(-\frac{48}{89}\right) - 3 \times \left(\frac{36}{89}\right) + 8 \times \left(\frac{171}{89}\right) - 12 = -\frac{192}{89} - \frac{108}{89} + \frac{1\,368}{89} - \frac{1\,068}{89}$$

soit 0.

Il s'ensuit que le point de coordonnées $\left(-\frac{48}{89}\,;\frac{36}{89}\,;\frac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ) et (Π).

Achevé d'imprimer en Italie par G. Canale & C. S.p.A.
Dépôt légal N° 23928 - Juillet 2002

Tle

COLLECTION
PREP@BAC

À chacun sa préparation du bac dès la seconde

Terminales

	l'essentiel du cours — bases	l'entraînement progressif — exercices	le tout-en-un du bac — examen
PHILOSOPHIE	L/ES/S		L/ES/S
HISTOIRE	L/ES/S		L/ES/S
GÉOGRAPHIE	L/ES/S		
SES	ES		ES OBL. et SPÉ.
ANGLAIS		Toutes Séries	
MATHS		ES OBL. et SPÉ.	ES OBL. et SPÉ.
	S OBL. et SPÉ.	S OBL. et SPÉ.	S OBL. tome 1
			S SPÉ. tome 2
			L
PHYSIQUE	S OBL. et SPÉ.	S OBL. et SPÉ.	S OBL. et SPÉ.
CHIMIE			S OBL. et SPÉ.
SVT	S OBL. et SPÉ.	S OBL. et SPÉ.	S tome 1
			S tome 2

48 8089 4
9 782218 739019

Ce tout-en-un propose, pour chaque thème du programme, l'essentiel des connaissances à maîtriser, des fiches méthodes suivies d'exercices d'évaluation et, pour se préparer à l'examen, des exercices d'application et de synthèse ainsi que des sujets type bac avec tous les corrigés.

Surfez vers votre Bac avec Hatier !

couverture : olivier-guichard@lycos.com